

MARCO ANDREATTA

FORMA LUCRURILOR

ALFABETUL GEOMETRIEI

HUMANITAS



Am vrut, în această „prezentare minimală“, să țin seama de dezvoltarea istorică a geometriei: am ales să povestesc anumite aspecte care mi se par fundamentale prin prisma rezultatelor obținute de mari geometri, într-o perspectivă temporală, plecând de la Thales și terminând cu Grigori Perelman. —MARCO ANDREATTA

FORMA
LUCRURILOR

Marco Andreatta este profesor de geometrie la Universitatea din Trento. Studiile sale se concentrează asupra geometriei algebrice proiective. Este directorul Departamentului de Matematică al Centrului Internațional de Cercetări Matematice din Trento și președintele Muzeului Științelor din Trento.

MARCO ANDREATTA

FORMA LUCRURILOR

ALFABETUL GEOMETRIEI

Traducere din italiană de
Liviu Ornea

HUMANITAS
BUCUREȘTI

Redactor: Vlad Zografi
Coperta: Ioana Nedelcu
Tehnoredactor: Manuela Măxineanu
Corector: Alina Dincă
DTP: Iuliana Constantinescu, Dan Dulgheru

Tipărit la Tipo Lidana – Suceava

Marco Andreatta
La forma delle cose. L'alfabeto della geometria

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Andreatta, Marco
Forma lucrurilor: alfabetul geometriei / Marco Andreatta;
trad. din italiană de Liviu Ornea. – Bucureşti:
Humanitas, 2021
ISBN 978-973-50-6881-3
I. Ornea, Liviu (trad.)
51

EDITURA HUMANITAS
Piaţa Presei Libere 1, 013701 Bucureşti, România
tel. 021.408.83.50, fax 021.408.83.51
www.humanitas.ro

Comenzi online: www.libhumanitas.ro
Comenzi prin e-mail: vanzari@libhumanitas.ro
Comenzi telefonice: 0723.684.194

Silviei,
care a dat formă viselor mele

Cuprins

Introducere

Geometrie e un cuvânt care vine din greacă, *γεομετρια*, şi înseamnă „măsura pământului“. Termenul indică o disciplină veche, unul dintre cele mai studiate şi sofisticate sisteme ale gândirii filozofice, capabil să furnizeze interpretări ale lumii în care trăim şi tehnicile de care avem nevoie ca să ne putem împlini aşteptările şi dorinţele, sistem care s-a dezvoltat printr-un proces evolutiv caracteristic speciei umane în raporturile sale cu spaţiul.

Azi, geometria e o ştiinţă organizată în mai multe subdomenii, cu multiple teme de cercetare şi probleme deschise, corelată în varii forme cu alte ştiinţe şi având numeroase aplicaţii în lumea tehnicii şi a producţiei. Fiecare şcoală, universitate sau centru de cercetări din lume are un sector, fie el didactic sau de cercetare, dedicat geometriei.

O poveste care a început cu peste trei mii de ani în urmă, în care regăsim caracteristicile dezvoltării evolutive a gândirii ştiinţifice, constând în lărgiri succesive ale domeniului studiat odată cu îmbunătăţirea continuă a tehnicilor de cercetare, marcată de momente de adevărată revoluţie a gândirii. O poveste corală, construită cu concursul foarte multor savanţi adesea necunoscuţi, caracterizată de opera câtorva mari maeştri ale căror fantezie şi inteligenţă i-au determinat dezvoltarea. Unii dintre cei mai mari oameni de ştiinţă contemporani lucrează în acest domeniu, iar descoperirile lor sunt considerate printre cele mai originale şi fecunde din panorama ştiinţifică actuală.

În această „prezentare minimală“ am vrut să ţin seama de dezvoltarea istorică a geometriei: am ales să povestesc anumite

aspecte care mi se par fundamentale prin prisma rezultatelor obținute de mari geometri, într-o perspectivă temporală, plecând de la Thales și terminând cu Grigori Perelman. Atunci când s-a putut, am încercat și să redau întocmai cuvintele protagoniștilor acestei aventuri a cunoașterii. Matematica e și un limbaj, acela al științei; formularea unor teorii noi sau a unor rezultate noi nu poate fi „neutră“, ea reflectă gustul și sensibilitatea științifică a autorului și, aproape întotdeauna, determină dezvoltările ulterioare.

Cititorul să nu se lase totuși înșelat, să nu creadă că va citi doar un text cu valențe istorice. Teoriile descrise sunt deosebit de „robuste“ și, aplicate domeniului la care se referă, sunt azi absolut valide, în aceeași formă și în același mod în care au fost create. Geometria euclidiană, de exemplu, care studiază planul obișnuit și obiectele definite în el, e azi perfect egală cu aceea descrisă în *Elementele* lui Euclid.

Acest tip de abordare e, probabil, inevitabil pentru a prezenta o cunoaștere străveche care, după cum am mai spus, s-a dezvoltat lărgindu-și treptat aria de cercetare și rafinându-și tehnicile.

Paginile primului capitol încearcă să schițeze un cadru general al conținutului cărții, dimpreună cu câteva chei de lectură de tip filozofic și epistemologic.

Urmează alte trei capitole în care plec de la concepte de bază și de la rezultate legate de ele, avansând treptat către idei mai complexe, ajungând până la unele dintre cele mai importante rezultate din geometria zilelor noastre. În capitolul al doilea e vorba despre curbe și despre cum le-au folosit mari matematicieni ca să construiască teorii care stau acum la baza geometriei. În capitolul al treilea, studiem suprafețele și unele teoreme surprinzătoare care le descriu; sunt rezultate care au influențat enorm și au caracterizat istoria progresului uman. În ultimul capitol e vorba despre varietăți, obiecte geometrice cu mai multe dimensiuni, care generalizează curbele și suprafețele – concept extrem de versatil cu care geometria a putut ataca probleme puse de alte discipline științifice. Unele dintre

teoriile şi teoremele propuse şi-au găsit deja aplicaţii importante; pentru altele, aşa cum se întâmplă adesea în matematică, aplicaţiile vor apărea peste câteva decenii în forme şi modalităţi pe care încă nu ni le imaginăm, dar care, atunci, ni se vor părea cu totul naturale.

Calde mulţumiri colegilor Claudio Fontanari, Gianluca Occhetta şi Roberto Pignatelli pentru numeroasele discuţii ştiinţifice şi lectura atentă a unor părţi din carte.

1. Spațiul, o problemă filozofică

GENEZA, GEOMETRIA GREACĂ

De unde să pornim, așadar, când vorbim despre teorii geometrice? Egiptenii și babilonienii foloseau concepte geometrice nu tocmai rudimentare. Pe tăblița de lut din perioada paleo-babiloniană 1800–1600 î.Cr. (figura 1.1), de exemplu, vedem desenat un pătrat de latură 30 împreună cu diagonalele sale.

În scriere cuneiformă și în sistemul sexagesimal pot fi citite numerele 1,414213 și 42,42639, aproximări excelente pentru $\sqrt{2}$ și $30 \cdot \sqrt{2}$. Reprezintă măsura diagonalelor pătratului de latură 1 și ale pătratului de latură 30, după cum se vede dintr-un calcul care necesită cunoașterea teoremei lui Pitagora – cel puțin în anumite forme particulare ale ei.

Primii care au dezvoltat organic geometria au fost filozofii greci; ei sunt cei care au elaborat o gândire matematică dezvoltând-o din rezultate stabilite anterior, pornind de la doar puține principii de bază, oarecum evidente, pe care le-au numit *axiome* sau *postulate*. Din acest punct de vedere, figura emblematică ar putea fi Thales din Milet (625–547 î.Cr.), mereu în căutarea unui *principiu inițial de la care pleacă totul*. Din



Figura 1.1

manualele de filozofie aflăm că stabilise *apa* drept element primar din care se trage viața. În manualele de geometrie stă scris că ar fi luat drept punct de plecare conceptul de *dreaptă* pe care, de altfel, se bazează faimoasa sa teoremă de conservare a raportului dintre segmentele determinate pe o dreaptă arbitrară de intersecțiile cu două drepte paralele fixate. Hegel afirmă că

> Filozofia începe cu această propoziție, fiindcă prin ea conștiința își dă seama că unul este esență, ceea ce e adevărat, că numai el este ceea-ce-ființează-în-sine-și-pentru-sine. Apare aici o despărțire de ceea ce ne este dat în percepția sensibilă, o retragere din ceea-ce-este-nemijlocit.*

Ca urmare, după cum povestește ironic Platon, își atrage batjocura unei slujnice din Tracia care-l vede căzând într-un puț în timp ce observă astrele, cu capul lăsat pe spate:

> se străduiește să cunoască lucrurile din cer, dar îi scapă cele de dinainte și din dreptul picioarelor.**

Thales, Democrit și Platon sunt, cu siguranță, primii gânditori pe care-i putem defini drept *idealiști*, deoarece pun la baza concepțiilor lor lumea ideilor – de la cuvântul grecesc ιδεα care înseamnă „schemă sau figură geometrică". Cu ei se naște dualismul dintre empirism și idealism care a prilejuit dezbateri aprinse despre natura cunoașterii; întrebare care s-a pus și se pune încă și în legătură cu geometria. E sigur că geometria se sprijină pe experiența omului care se deplasează în spațiu: apare deci ca o știință experimentală, iar rezultatele la care ajunge au nenumărate aplicații tehnologice de natură practică. Pe parcurs însă, se poate întâmpla, ca în cazul lui Thales, după cum spune Hegel, să luăm distanță față de datele percepției sensibile, să ne retragem din fața a ceea ce e imediat; dar poziția adoptată depinde mult de formația culturală și de sensibilitatea fiecăruia.

---

* Hegel, *Prelegeri de istoria filozofiei*, trad. D.D. Roșca, Ed. Academiei RPR, București, 1963. (*N. tr.*)

** Platon, *Theaitetos*, trad. Andrei Cornea, Humanitas, București, 2013. (*N. tr.*)

Abordarea prea idealistă a geometriei a avut încă de la început mulți critici: sofiștii și empiriștii, de exemplu, susținuți și de Aristotel, contestau ca fiind lipsite de semnificație principiile primare de felul liniei drepte fără lățime, tangenta într-un singur punct și nu pe o întreagă porțiune. Ba chiar scepticul Sextus Empiricus (sec. II), în cartea *Adversus geometras*, respingea disciplina *in toto*.

În general, tendința idealistă către o puternică abstractizare a conceptelor și metodelor i-a făcut pe gânditorii din comunitatea lărgită a filozofilor să nu aprecieze și chiar să nu priceapă importanța descoperirilor din geometrie. Ca urmare, încadrarea sa ca sistem filozofic a avut mereu faze contradictorii – le vom trece succint în revistă.

Un susținător convins al geometriei și al modului său de argumentare a fost cu siguranță Platon care a trăit mai ales la Atena, între 427–347 î.Cr.

Se spune că pusese să se scrie deasupra intrării în Academia sa fraza: αγεωμετρητος μηδεις εισιτω, „să nu intre cine nu cunoaște geometria". Aici se aplică jocul lingvistic, permis de limba greacă, care punând litera alpha (α) în fața unui cuvânt îi conferă semnificația de lipsă ori de negație: fără geometrie nu se ajunge la cunoaștere.

Fraza aceasta a avut o mare influență asupra culturii moderne: o regăsim de la Copernic (ca motto la cartea sa *De revolutionibus coelestium*) până la logoul Societății Americane de Matematică (fig. 1.2). Azi e poate încă și mai importantă și, după mine, e cu atât mai demnă de atenție cu cât poate fi pusă alături de titlul faimosului articol al fizicianului Eugene

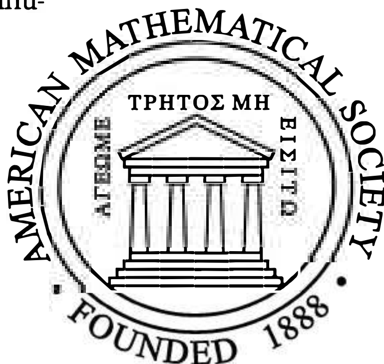


Figura 1.2

P. Wigner „Eficacitatea nerezonabilă a matematicii (și deci a geometriei) în științele naturale".

Nu există disciplină științifică actuală care să se poată lipsi de geometrie. Rezultatele fizicii universului ca și cele ale fizicii particulelor elementare, de exemplu, sunt formulate în termenii unor modele geometrice complexe. Biologia moleculară și, mai general, știința vieții, interpretează structuri ca ADN-ul și genomul prin formele lor geometrice elicoidale; înțelegerea pozițiilor lor spațiale ne permite să creăm asemenea structuri și să le controlăm variațiile, procese care au numeroase aplicații.

Atunci când afirma importanța geometriei pentru formarea cuiva, Platon avea, desigur, în vedere și alte activități, nu doar pe cele științifice. În particular, capacitatea inovativă și revoluționară a geometriei în artă, o constantă de-a lungul istoriei. În pictură, perspectiva e una dintre cuceririle Renașterii italiene; azi, alături de alte teorii geometrice, ca topologia, revoluționează arhitectura: să ne gândim numai la arhitecți ca Renzo Piano sau Zaha Hadid care au construit edificii bazându-se pe teoreme de geometrie.

Prin gura lui Socrate, în *Menon*, discutând despre posibilitatea de a-i învăța pe alții virtutea, Platon dă o frumoasă definiție științei și-i explică importanța:

> Doar și presupunerile adevărate, câtă vreme rămân pe loc, sunt o treabă bună și aduc numai foloase. De obicei însă, ele nu vor să rămână mult timp pe loc, ci o iau la fugă din sufletul omului, așa încât nu au cine știe ce valoare până nu sunt legate printr-o cântărire a cauzelor. Și tocmai asta este, prietene Menon, reamintirea, în sensul asupra căruia am căzut de acord mai înainte. După ce sunt legate, aceste presupuneri devin cunoștințe raționale și ca atare statornice. Și de aceea este mai de preț știința decât presupunerea corectă: spre deosebire de presupunerea corectă, știința este înlănțuită locului.*

---

* *Menon*, trad. Liana Lupaș și Petru Creția, în Platon, *Opere*, vol. II, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1976. (*N. tr.*)

Aşadar, ştiinţa e *un raţionament care se bazează pe cauzalitate* şi care, tocmai din acest motiv, devine cunoaştere stabilă şi are valoare mai mare decât simpla opinie.

Înainte de asta, răspunzându-i insistentului Menon, Socrate spusese:

> Dar, de vreme ce tu nu încerci să-ţi impui nimic, de bună seamă ca să rămâi un om liber, iar mie cauţi să-mi impui voinţa ta şi chiar mi-o impui, n-am încotro, am să-ţi dau ascultare. Se pare deci că trebuie să cercetăm ce calităţi are un lucru care încă nu ştim ce este. Dar ce-ar fi dacă ţi-ai slăbi măcar un pic asuprirea şi mi-ai îngădui să cercetez *prin ipoteză* dacă virtutea se poate învăţa de la altul sau nu. Spun „prin ipoteză“ aşa cum fac adesea, în cercetările lor, geometrii: dacă cineva ar întreba, în legătură cu o suprafaţă, de pildă, dacă este posibil să se înscrie sub formă de triunghi o suprafaţă dată într-un cerc dat, geometrul ar răspunde: „Încă nu ştiu dacă este cu putinţă un astfel de lucru, dar cred că am un fel de ipoteză folositoare pentru problema noastră şi anume: dacă această suprafaţă este de aşa natură încât cel care o construieşte sub formă de paralelogram pe ‹o parte din› diametrul cercului să poată construi pe partea rămasă un paralelogram asemenea cu primul, mi se pare că lucrurile stau într-un fel, iar dacă n-o poate construi aşa, atunci ele stau altfel. Vreau aşadar să-ţi explic prin ipoteză ce se întâmplă cu înscrierea în cerc a acestei suprafeţe, este ea posibilă sau nu.“ La fel să procedăm şi noi cu virtutea; de vreme ce nu ştim nici ce este, nici ce calităţi are, să cercetăm prin ipoteză dacă poate fi învăţată de la altul sau nu, spunând aşa: admiţând că virtutea este de natura uneia dintre părţile constitutive ale sufletului, ‹de natura căreia ar trebui ea să fie› pentru a putea fi învăţată de la altul?*

Ştiinţa examinează calitatea unui lucru doar dacă, în prealabil, la fel ca în geometrie, s-a convenit asupra anumitor ipoteze.

---

* Idem. (*N. tr.*)

Cu alte cuvinte, pentru a ieşi din zona simplelor păreri, trebuie creată o teorie care acţionează în două etape: mai întâi se formulează o listă de *ipoteze* asupra cărora toţi cad de acord. Apoi, în urma unor raţionamente logice deductive bazate pe cauzalitate, se construieşte cunoaşterea ştiinţifică. *Metoda logico-deductivă* e una dintre marile intuiţii ale filozofiei greceşti – ea caracterizează istoria gândirii şi dezvoltarea ştiinţei până în zilele noastre.

Metoda schiţată de Platon în *Menon* se materializează deplin în *Elementele* lui Euclid, una dintre cărţile cele mai citite şi influente din istoria spiritului uman. În ea, matematicianul Euclid (circa 325–265 î.Cr.) redactează o *summa* a gândirii greceşti din câmpul algebrei şi al geometriei, adunând laolaltă rezultatele lui Thales, Pitagora, Eudoxos şi alţii. E un veritabil manifest programatic care începe punând la dispoziţie noţiuni de bază, clare şi necontradictorii, sub formă de *definiţii* şi *postulate*. Printre acestea, definiţia punctului, a dreptei, a cercului şi a unghiului, despre care vom vorbi pe larg în capitolul următor, şi care azi, la distanţă de peste două mii de ani, se enunţă în exact aceeaşi formă.

Apoi, Euclid formulează o serie de *noţiuni comune* pe care le va folosi în deducţiile sale logice. De exemplu, faptul că două lucruri, fiecare egal cu un al treilea, sunt egale între ele, sau că întregul e mai mare decât orice parte a sa.

Continuă apoi într-o manieră destul de complicată şi sofisticată, demonstrând propoziţii şi teoreme, construind astfel întregul edificiu al geometriei euclidiene.

Opera aceasta a reprezentat standardul maxim în privinţa calităţii raţionamentului şi a rigorii în matematică pentru mai bine de două mii de ani. Şi merită observat că mulţi filozofi şi oameni de ştiinţă, ba chiar matematicieni, n-au fost uneori capabili s-o înţeleagă; asta pentru a nu pomeni atâţia elevi care şi azi găsesc geometria euclidiană din programa şcolară cu totul obscură.

În secolul XIX, totuşi, chiar şi *Elementele* au început să dea semne de vetusteţe: sunt supuse unor critici întemeiate,

apar propuneri de revizuire în acord cu exigențele și noile rezultate ale științei moderne.

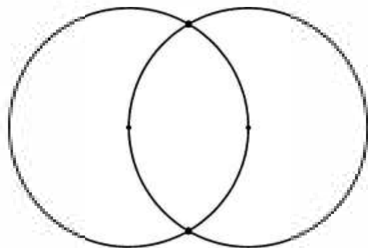


Figura 1.3

Printre observațiile cele mai semnificative e aceea că Euclid folosește adesea presupuneri „experimental" plauzibile, adesea manifest evidente prin prisma unui desen, dar fără să le insereze în postulate. Altfel spus, presupune ipoteze care par adevărate, dar pe care nu le declară astfel oficial.

Chiar în prima propoziție a *Elementelor*, de exemplu, în care construiește un triunghi echilateral de latură dată, Euclid presupune că două cercuri care au fiecare centrul pe circumferința celuilalt se intersectează în mod necesar. Privind figura 1.3, ni se pare că e, într-adevăr, evident.

Abia în secolul XIX se observă că acest lucru nu derivă din ipotezele inițiale și că, în consecință, ar trebui adăugat acestora. Ceea ce îl conduce pe matematicianul german David Hilbert, la sfârșitul secolului XIX, să întreprindă o revizuire completă a geometriei euclidiene, întemeind-o nu pe axiome derivate din experiență, ci pe axiome mai abstracte, asemenea acelora care descriu *numerele reale*. E exact epoca în care se pune la punct o teorie axiomatică a acestor numere care conțin, pe lângă numerele raționale, și pe cele iraționale, adică numerele care nu se pot exprima sub forma p/q, cu p și q numere întregi. În această teorie, numerele reale sunt o mulțime completă, adică fără goluri, capabile să reprezinte lungimea oricărui segment și punctele de intersecție a două cercuri. Reconstrucția lui Hilbert rămâne totuși în interiorul metodei trasate de Platon și Euclid, declarând întâi (noile) ipoteze, iar apoi raționând folosindu-le pe acestea, prin mecanisme logice de cauzalitate.

O altă presupunere faimoasă pe care Euclid nu a inclus-o printre ipoteze e aceea că, dată o dreaptă și un punct nesituat pe

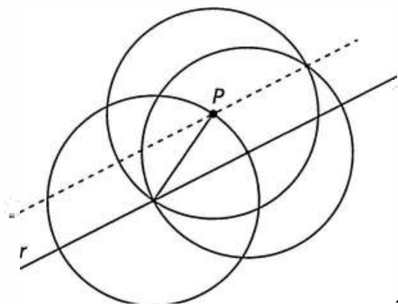


Figura 1.4

ea, se poate construi o dreaptă care trece prin acel punct și e paralelă cu dreapta de plecare. În Propoziția 31 din Cartea I a *Elementelor*, Euclid arată cum se construiește efectiv această dreaptă cu rigla și compasul: el furnizează deci o dovadă experimentală, bazată pe instrumente de folosință comună. Dar trebuie observat că nu derivă acest fapt în mod logic din ipotezele precedente.

Figura 1.4 arată cum se construiește paralela printr-un punct exterior folosind rigla și compasul.

Euclid introduce totuși un postulat de acest tip: e faimosul Postulat al V-lea care ne asigură că această paralelă e unică. Foarte mulți, de-a lungul timpului, au crezut că acest postulat e inutil, deoarece ar putea fi dedus din cele dinainte.

Și în acest caz, abia în secolul XIX s-a înțeles ce nu mergea și cum putea fi reparat. În particular, s-a descoperit că geometria descrisă de Euclid în *Elemente* nu e unica posibilă. Există o geometrie, numită *sferică*, cu un sistem de axiome și definiții aidoma celor ale lui Euclid, dar în care Propoziția 31 e falsă – altfel spus, în această geometrie *nu există paralele*. În plus, dacă Postulatul al V-lea e omis, ceea ce rămâne e în continuare un sistem coerent care realizează o nouă geometrie, zisă *hiperbolică*, în care *prin orice punct exterior unei drepte trec infinit de multe paralele la acea dreaptă*. Vom vorbi despre această geometrie în capitolul 3.

Lectura *Elementelor* e o experiență plăcută și chiar electrizantă uneori; dar sobrietatea și simplitatea spre care tind cei ce studiază geometria nu duc la o proză solemnă ori exaltată. Printre altele, nu găsim niciodată explicații despre geneza rezultatelor obținute, despre ce anume l-a inspirat pe autor. Întrebările privind felul în care apar teoremele matematice, cele de geometrie în particular, cum se ajunge la formularea lor și apoi la demonstrații, întrebările acestea rămân în mare măsură fără răspuns în *Elemente*.

Sunt întrebări care apar recurent în discuțiile dintre matematicieni, în corespondența sau în autobiografiile lor, printre care semnalez recenta *Teorema vie** a lui Cédric Villani, medaliat Fields în 2010 (pentru cine nu știe, Medalia Fields e un premiu care se acordă unor matematicieni odată la patru ani, cu ocazia congresului plenar al Uniunii Matematice Internaționale; destinatarii medaliei, cel puțin doi și maximum patru, sunt matematicieni de cel mult 40 de ani care s-au distins prin rezultate științifice excepționale și prin deschiderea pe care o pot da cercetărilor viitoare; e considerată cea mai importantă recunoaștere pe care o poate primi un matematician). Azi, unor asemenea întrebări le caută răspunsul și oamenii de știință care se ocupă de mintea umană, de cogniție; uneori, ele devin pretextul unor momente emoționante din filme de succes, ca *Proof* (*Demonstrația*) sau *Omul care a văzut infinitul*, sau mai recentele *Hidden figures* (*Cifre ascunse*) și *Gifted* (*Înzestrată*).

Un mare matematician al Greciei antice, siracuzanul Arhimede, atacă mai direct problema. Alături de Leonardo, Galilei, Einstein, el e una dintre figurile simbol ale geniului uman; un om care a pendulat continuu între nevoia de cunoaștere și necesitatea unor soluții tehnologice pentru numeroase probleme concrete. Personalitate multilaterală, matematician și geometru subtil, dar și inginer și consilier politic al tiranului din Siracuza. Sfârșitul său tragic – a fost asasinat de soldații lui Marcellus după cucerirea orașului – e o reprezentare a ambivalenței umane între fertila capacitate inovativă și pornirea de a distruge tot ce-i diferit, tot ce iese din tipare.

E absolut natural ca, în fața unui personaj de calibrul lui Arhimede, cu atât de variate preocupări științifice, să ne întrebăm cum și de ce poate mintea să ajungă la asemenea descoperiri.

Pătrunzător, Plutarh ni-l descrie nu doar preamărindu-i virtuțile, ci și întrebându-se implicit cum a putut fi atât de creativ:

---

* Ed. Humanitas, București, 2014. (*N. tr.*)

> Într-adevăr, în geometrie nu se pot găsi probleme mai complicate și mai grele scrise în elemente mai simple și mai curate [decât în geometria lui Arhimede]. Unii pun claritatea pe seama inteligenței lui Arhimede, iar alții spun că munca dusă până la exces le-a făcut să pară că au fost făcute ușor și fără nici o sforțare. S-ar putea să nu găsim prin noi înșine demonstrația vreunei probleme, dar, ajutați de învățătura lui, avem impresia că am fi putut s-o găsim noi înșine, atât de ușor și de repede ne duce la demonstrație.*

Arhimede redactează și un scurt tratat despre cum se ajunge la rezultatele din matematică: *Metoda teoremelor mecanicii*. Iată ce scrie în partea introductivă:

> m-am gândit că ar fi util să notez și să-ți prezint în aceeași carte o anume metodă particulară cu ajutorul căreia vei putea înțelege probleme de matematică prin intermediul mecanicii. Sunt convins că nu e mai puțin utilă pentru a găsi demonstrațiile respectivelor teoreme. De fapt, anumite lucruri, care mi s-au clarificat grație *metodei mecanice*, au fost apoi demonstrate geometric, pentru că studiul lor cu metoda mecanică nu produce demonstrații efective. Asta pentru că e mai ușor să producem demonstrația după ce, în prealabil, folosind acea metodă, am aflat câte ceva despre problemă, decât s-o găsim fără a ști nimic dinainte. Din acest motiv, în cazul teoremelor găsite întâi de Eudoxos, anume acelea despre con și despre piramidă, conform cărora conul e o treime din cilindru, iar piramida o treime din prisma cu aceeași bază și înălțime egală, nu puțin credit trebuie să-i dăm lui Democrit, primul care a stabilit proprietatea acestei figuri, chiar dacă fără demonstrație. [...] Aș vrea deci să-ți explic în scris metoda [...] în parte pentru că sunt convins că se va vădi extrem de utilă pentru

---

* Plutarh, *Marcellus*, trad. N. I. Barbu, în *Vieți paralele*, vol. II, Ed. Științifică, București, 1963. (*N. tr.*)

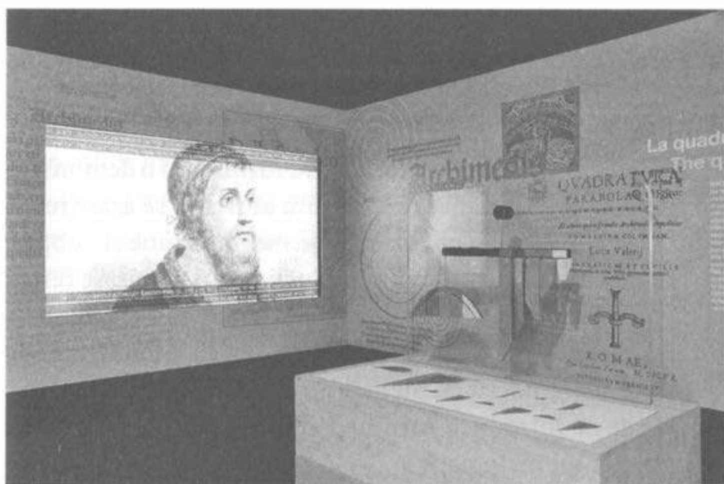


Figura 1.5

> matematică; într-adevăr, presupun că în generațiile viitoare, ca și în cea de-acum, se vor găsi unii care, prin metoda descrisă, vor fi în stare să găsească alte teoreme la care încă nu ne-am gândit.

Metoda mecanică la care se referă Arhimede folosește la măsurarea unor cantități ca lungimea, aria ori volumul obiectelor spațiale prin compararea lor cu alte obiecte ale căror măsuri sunt cunoscute. Compararea se face și plasând cele două obiecte la capetele unei pârghii în echilibru: măsura obiectelor va fi invers proporțională cu lungimea brațelor pârghiei.

Figura 1.5 reprezintă un *exhibit*, expus la Muzeul Științelor din Trento cu ocazia unei expoziții chiar despre Arhimede, în 2017, care dă o idee despre această metodă, egalând aria necunoscută a unui sector de parabolă cu aceea, binecunoscută, a unui triunghi.

Celebra zicere care i se atribuie „Dați-mi un punct de sprijin și am să răstorn lumea" are cu siguranță o bază în acest tratat.

Vom vedea mai în detaliu în capitolul 3 cum a utilizat Arhimede această metodă ca să calculeze volumul și suprafața sferei, rezultat pe care îl considera drept cel mai important dintre toate cele obținute de el.

Arhimede susține că metoda sa nu furnizează o demonstrație efectivă, ci doar o idee despre cum ar trebui să arate rezultatul. O demonstrație concluzivă – *geometrică*, spune el – obține cu metoda logică, deductivă a lui Euclid. Mai precis, se referă la metoda exaustiei a lui Eudoxos, care apare în *Elemente*, subliniind că Eudoxos perfecționează cu logica demonstrațiile obținute de Democrit cu metode de tip mecanic.

Dar de ce introduce Arhimede balanța cu brațe egale în raționamentul matematic?

În splendidele sale *Lecții americane*, Italo Calvino deschide capitolul *Exactitatea* povestind că

> La vechii egipteni, precizia era simbolizată printr-un fulg care folosea drept greutate pe talerul balanței cu care se cântăresc sufletele. Acel fulg ușor purta numele de Maat, zeița balanței. Hieroglifa lui Maat mai indica și unitatea de măsură a lungimii unei cărămizi, adică 33 de centimetri, și tonul de bază al flautului.*

Toate acestea le-a aflat, spune el, ascultând o conferință a lui Giorgio de Santillana.

Arhimede, care, din Siracuza, întreținea o corespondență asiduă cu învățații bibliotecii din Alexandria Egiptului, era cu siguranță familiarizat cu cultura egipteană. În particular, cunoștea hieroglifa cu unitățile de măsură, cultul exactității și felul cum era folosit pentru a cântări sufletul cu o balanță comparându-l cu un fulg. De ce nu ne-am închipui că i se părea natural să extindă această tehnică de la ceva impalpabil, cum e sufletul, la ceva mult mai concret, cum sunt segmentul de parabolă și măsurile sferei?

---

* *Lecții americane*, trad. Oana-Boșca Mălin, Ed. Humanitas, București, 2019. (*N. tr.*)

Cum raționează mintea noastră, în matematică mai ales? Întrebarea a primit multe răspunsuri care au influențat ideile oamenilor în cele mai diferite domenii. Matematicianul francez René Descartes își prefațează marea operă, *La Géométrie* (*Geometria*), cu un text intitulat *Discours sur la méthode* (*Discurs despre metodă*).

Studiul acesta, gândit ca o introducere la tratatul complex și revoluționar despre geometrie, examinează *regulile* de bază care, după Descartes, trebuie urmate pentru a construi o teorie matematică. Descartes scrie:

> Pe când eram mai tânăr am studiat dintre ramurile filozofiei logica, iar dintre cele ale matematicii – analiza geometriilor și algebra, trei arte sau științe care păreau capabile să contribuie într-un fel la realizarea scopului meu. Studiindu-le, mi-am dat seama că, în ceea ce privește logica, silogismele și majoritatea celorlalte reguli ale sale servesc mai degrabă la a explica lucruri care se știu, sau chiar, ca în arta lui Lullus, la a vorbi fără temei despre lucruri pe care nu le cunoști.*

E limpede că Descartes reia punctul de vedere al lui Arhimede după care logica, raționamentul deductiv trebuie lăsat la sfârșit, pentru a explica lucruri deja cunoscute.

Și continuă:

> În ceea ce privește geometria celor vechi și algebra modernilor, dincolo de faptul că se referă la materii foarte abstracte și care nu par a fi de vreun folos, prima se limitează la studiul figurilor și nu poate face intelectul să lucreze fără a obosi mult imaginația; cât o privește pe cea de-a doua, ne

---

* René Descartes, *Discurs despre metodă*, trad. Daniela-Rovența Frumușani și Alexandru Boboc, Ed. Academiei Române, București, 1990. (*N. tr.*)

lăsăm dominați într-atâta de reguli și cifre încât s-a ajuns la o artă confuză și obscură care mai mult încurcă spiritul, în locul unei științe care să-l cultive. Din această pricină m-am gândit că trebuia căutată o altă metodă care să conțină avantajele celor trei, nu însă și defectele lor. [...] tot astfel, în locul numeroaselor precepte ale logicii, am crezut că-mi vor fi suficiente următoarele patru reguli cu condiția de a nu mă abate de la hotărârea fermă și statornică de a le respecta întotdeauna.*

Iată deci ce numise, în scrieri precedente, *regulae ad directionem ingenii.*

În prima ni se sugerează

de a nu accepta niciodată un lucru ca adevărat dacă nu-mi apărea astfel în mod evident; adică de a evita cu grijă precipitarea și prejudecata și de a nu introduce nimic în judecățile mele decât ceea ce s-ar prezenta clar și distinct spiritului meu, neputând nicicum să fie pus la îndoială.**

Aici regăsim filozofia axiomelor și a postulatelor lui Euclid, considerate bune ca date de pornire. Pentru Descartes, evidența nu e neapărat experimentală, ci apare și din nevoia de precizie și distincție a minții umane; e primatul minții care stă și la baza faimosului *cogito ergo sum.*

A doua regulă constă în

a împărți fiecare dificultate analizată în câte fragmente ar fi posibil și necesar pentru a fi mai bine rezolvate.***

Descartes propune să examinăm un lucru nu în totalitatea sa, ca să nu riscăm să ne pierdem în complexitatea lui, ci împărțindu-l în părți care pot fi înțelese cu ușurință.

Și acest pasaj trimite la metodologii clasice, cum sunt teoriile atomiste ale presocraticilor și teoria secțiunilor conice

* Idem. (*N. tr.*)

** Ibidem. (*N. tr.*)

*** Ibidem. (*N. tr.*)

din geometria lui Apoloniu din Perga. Azi, aceasta e o regulă fundamentală pentru geometria care își analizează și clasifică obiectele prin prisma părților indivizibile și descriptibile; vom da câteva exemple în capitolul 3.

A treia regulă privește analiza trecerii inverse, de la părți la întreg:

> de a-mi conduce în ordine gândurile, începând cu obiectele cele mai simple și mai ușor de cunoscut, pentru a mă ridica puțin câte puțin, ca pe niște trepte, la cunoașterea celor mai complexe și presupunând o ordine chiar între cele care nu se succedă în mod firesc.*

Aceasta e partea cea mai complexă care se realizează abia după ce le-am înțeles bine pe primele două și le-am ordonat conform dificultății.

Pentru a opera bine în această a treia parte, în regula a patra Descartes declară că ia exemplu de la geometri și, în general, de la matematicieni:

> de a face peste tot enumerări atât de complete și revizuiri atât de generale, încât să fiu sigur că n-am omis nimic. Aceste lungi șiruri de explicații foarte simple și la îndemână, de care geometrii obișnuiesc să se slujească pentru a reuși în demonstrațiile lor. [...] Ținând seama de faptul că dintre toți cei care au cercetat până acum adevărul în științe, matematicienii au fost singurii care au putut ajunge la unele demonstrații, adică unele temeiuri certe și evidente, nu mă îndoiam că le-au găsit pe aceeași cale; singurul folos pe care l-am tras a fost acela de a-mi obișnui spiritul să se hrănească cu adevăr și să nu se mulțumească cu argumente false.**

Aici se precizează ceea ce Descartes însuși definește drept *mathesis universalis*, o știință generală, bazată pe matematică și

---

* Ibidem. (*N. tr.*)

** Ibidem. (*N. tr.*)

„care își propune să explice tot ce se poate cerceta cu privire la ordine și măsură fără a recurge la o materie specială". Descartes pare să propună extinderea acestor reguli la întreaga gândire umană, nu numai la aceea științifică. Dacă o atare întreprindere ar avea succes în discipline diferite de matematică – iată o întrebare care a fost dezbătută de-a lungul timpului de numeroși filozofi.

Funcționează însă din plin în geometrie: într-adevăr, în *Géométrie*, Descartes găsește modul prin care să unească geometria și algebra pe care

> pentru a reține sau înțelege mai multe laolaltă, trebuia să le transpun în cifre, cât mai scurte posibil, utilizând tot ce era mai bun în analiza geometrică și algebră și îndreptând scăderile uneia prin cealaltă.*

E actul de naștere al geometriei analitice, care asociază conceptului geometric de curbă conceptul algebric de ecuație – voi prezenta chestiunea în detaliu în capitolul 2.

A fost o schimbare revoluționară, între altele în opoziție cu filozofia lui Aristotel care vedea o distincție netă, un zid, între aritmetică și geometrie. În *Analytica posteriora* (I 7 75a 38–39), Aristotel scria: „Urmează că, în demonstrație, nu putem trece de la un gen la altul. Nu putem, de exemplu, dovedi adevăruri geometrice prin adevăruri aritmetice."**

Studiul operelor lui Euclid și Descartes, poate și ale lui Arhimede, epuizează aproape complet cunoștințele de geometrie ale majorității populației instruite, chiar și la nivel universitar. Cam peste tot în lume, în gimnazii și licee se studiază geometria lui Euclid și a lui Arhimede. Abia în ultimii ani de liceu și la universitate apare geometria analitică a lui Descartes, adesea

---

* Ibidem. (*N. tr.*)

** Aristotel, *Organon*, vol. II, trad. de Mircea Florian, ed. IRI, București, 1998. (*N. tr.*)

fără a se da o soluţie de continuitate, făcându-i pe studenţi să uite ce învăţaseră înainte de la Euclid.

Mi se pare ciudat că sistemul ăsta e neschimbat de decenii şi că practica didactică n-a evoluat de atâta vreme în aşa fel încât să permită prezentarea unor teorii geometrice mai moderne.

Metoda carteziană a coordonatelor şi a ecuaţiilor, punct de plecare al unei modernizări a geometriei, a fost posibilă nu doar graţie fericitului progres al algebrei în secolul precedent, ci şi apariţiei unui nou fel de a concepe ştiinţa introdus de Galileo Galilei. Acesta se născuse cu treizeci de ani înainte de Descartes, care cu siguranţă l-a citit şi studiat, preţuindu-l cum se cuvine. De fapt, Descartes, prin structura lui, tindea să nu aibă opinii foarte bune despre colegi – cu excepţia, poate, a lui Galilei pe care, totuşi, îl considera „nu suficient de sistematic".

Discursuri şi demonstraţii matematice în jurul a două noi ştiinţe (1638) a lui Galileo Galilei e opera care iniţiază în secolul XVII noua metodă ştiinţifică, una caracterizată de fuziunea dintre limbajul matematic şi cercetarea filozofică. Asistăm la o înnoită şi mai profundă fuziune între conceptele abstracte din matematică şi modul analogic şi discursiv prin care avansa filozofia naturală, geometria devenind instrumentul cel mai potrivit pentru a crea şi descrie noile teorii. În particular, se dezvoltă o disciplină nouă care nu mai e nici pur speculativă, dar nici pur deductivă încă, din care se va trage fizica modernă.

Discursurile reprezintă realizarea unui proiect de cercetare pe care Galilei şi-l trasase încă de la primele studii despre căderea liberă a corpurilor, alăturând ce mai rămânea vital din metodologia aristotelică de cercetarea matematică a fenomenelor fizice propusă cu atâtea secole în urmă de Arhimede.

Fragmentul care exprimă cel mai bine punctul de vedere galileian, cel mai cunoscut şi citat, e acela, faimos, din *Saggiatore*:

> Filozofia este scrisă în această imensă carte care stă deschisă fără încetare în faţa ochilor noştri (eu îi spun univers), pe care însă nu o putem înţelege dacă nu învăţăm întâi să-i

înțelegem limba și să-i cunoaștem personajele care apar în ea. Iar ea e scrisă în limba matematicii, și personajele sunt triunghiuri, cercuri și alte figuri geometrice fără de care e omenește imposibil să-i înțelegem vreun cuvânt; în lipsa lor, ne vom tot învârti zadarnic într-un labirint întunecat.

E evidentă legătura cu gândirea lui Platon și cu îndemnul său de a studia geometria – desigur, cu o nouă vigoare și cu atenția îndreptată către problemele firești ale vremii lui.

La aceleași concluzii ajunge, câteva secole mai târziu, Albert Einstein care, perfect conștient de a fi construit prin doar puterea minții o filozofie naturală revoluționară, întâmpină o mulțime de dificultăți când vrea s-o formuleze ca teorie științifică. Va spune că a încercat senzația frustrantă că-i lipseau cuvintele pentru a se putea exprima. Urmând sfaturile lui Platon și Galilei, cu ajutorul colegului Marcel Grossmann, cu răbdare și anevoie, Einstein studiază în 1912 teoriile la zi din geometrie. Abia cu acestea reușește în sfârșit să formuleze teoria relativității generale – care azi se vede încadrată printre așa-zisele teorii geometrice (voi vorbi despre ele în capitolul 4).

NAȘTEREA ANALIZEI MATEMATICE

Revoluția științifică promovată de Galilei și Descartes se răspândește rapid și devine curând noua paradigmă a cercetării. Înfloresc idei noi și în alte științe, apar aplicații numeroase. Dar foarte repede devine limpede că noua metodă are nevoie de o mai mare capacitate de calcul; astfel că, după doar câteva zeci de ani, o mulțime de savanți revoluționari, printre care Christiaan Huygens, Isaac Newton, Gottfried Leibniz și mai mulți membri ai familiei Bernoulli, inițiază acea disciplină matematică numită la început *calculus*, cunoscută azi sub numele de *analiză matematică*. *Calculus* apare pentru a calcula lungimi, arii sau volume ale obiectelor geometrice plane sau spațiale. Se vrea

o scurtătură față de metoda mecanică și a exhaustiei a lui Arhimede; Huygens scrie:

> Matematicienii nu vor avea niciodată timp să citească toate descoperirile geometriei, care se adună continuu, zi după zi, și par să ajungă la o cantitate enormă în această eră științifică, dacă ele vor continua să fie prezentate în formele riguroase ale celor vechi.

Curând, lumea înțelege că folosind *calculus* se pot demonstra rezultate noi și surprinzătoare. Se dovedește, de exemplu, deosebit de potrivit pentru studiul tangentelor și al curburii curbelor sau suprafețelor, concepte naturale și intuitive care, mulțumită acestei metode noi, vor juca un rol din ce în ce mai important în geometrie. Permite și atacarea chestiunilor care azi poartă numele de *probleme variaționale* sau *de minim*; de exemplu, calcularea drumului cel mai scurt între două puncte de pe o suprafață, drum numit *geodezic*, sau a drumului pe care-l parcurge în timp minim un mobil greu supus unor forțe externe, așa-numita traiectorie *brahistocronă*.

Pentru un cititor curios și curajos, e o experiență interesantă să răsfoiască unele cărți ale lui Newton disponibile în ediția digitală a Universității Cambridge: https://cudl.lib. cam. ac.uk/collections/newton/. Va descoperi că ingenioasa construcție teoretică a noilor instrumente de calcul se sprijină în mare parte pe construcții de geometrie euclidiană, nu neapărat elementare, și că inventarea analizei matematice se bazează pe extraordinara pricepere cu care Newton folosea geometria lui Euclid.

Abordarea lui Leibniz e mai abstractă, vizând nu doar găsirea soluțiilor unor probleme de geometrie, ci și a unei „metode generale cu care toate adevărurile raționale să fie reduse la un calcul, [...] *qua facto calculemos*". Regăsim aici utopia lui Descartes, acea *mathesis universalis*, ideea că orice dispută rațională poate fi rezolvată printr-un raționament matematic. Unii văd aici germenii viitoarei teorii a informației, sau ai informaticii,

prima ipostază a unei mașini Turing. O utopie care se va confrunta cu teoremele de incompletitudine și indecidabilitate ale lui Gödel.

Abia la finele secolului XIX se ajunge la o bază axiomatică satisfăcător de clară și de coerentă pentru *calculus*, odată cu formalizarea matematică a numerelor reale, despre care am pomenit mai sus, și cu conceptul de limită. Astfel se încheie lungul proces inițiat de Arhimede: cu ajutorul analizei, multe rezultate de geometrie au azi demonstrații inatacabile, pentru că sunt necontradictorii din punct de vedere logic. În zilele noastre, volumul sferei și, în general, „măsurile" obiectelor din spațiu se calculează cu integrale de mai multe variabile.

În *Analysis situs*, Leibniz introduce și un mod nou de a gândi geometria, unul care, în urma unui lung și profund proces de maturizare, stă acum la baza teoriei geometrice contemporane. El chestionează natura ontologică și epistemologică a geometriei și propune s-o considerăm nu drept o teorie a figurilor, ci drept o *știință a spațiului*. Leibniz deschide o perspectivă nouă în care obiectele geometriei nu sunt doar figurile sau cantitățile continue, ca în tradiția greacă, ci și spațiul însuși.

Mai precis, Leibniz consideră spațiul drept o structură și îl descrie, cu o definiție faimoasă, ca pe o *ordine de poziții*, unde prin poziție se înțelege o relație (geometrică) între obiecte. Definiția aceasta e folosită în disputa lui cu Newton, care considera spațiul ca pe ceva absolut, nestructurat.

Sunt multe figurile din spațiu pe care le putem considera: dreptele, de exemplu, cercurile, dar și punctele – mai ales punctele. În abordarea aceasta abstractă, punctul nu e altceva decât un obiect conceput ca fiind corelat cu altele printr-o relație de poziție, relație care se poate caracteriza, de exemplu, printr-o distanță, caz în care două mulțimi de puncte au aceeași situare reciprocă dacă și numai dacă au aceeași distanță între ele. Această definiție a spațiului ca ordine a unor situări determinate de distanță e probabil prima definiție naivă a conceptului modern de spațiu metric sau de *structură metrică*,

concept care va fi introdus în manieră sistematică abia de Riemann în secolul XIX.

Textul originar al lui Leibniz, ca și multe comentarii asupra lui, se găsește în recenta carte a lui Vincenzo de Risi, *Leibniz despre postulatul paralelelor și fundamentele geometriei**, în care observă cum considerațiile acestea epistemologice novatoare n-au fost, de fapt, aplicate de filozoful matematician în practica sa geometrică, ceea ce poate însemna că nu le înțelesese până la capăt.

În particular, într-una dintre încercările de a demonstra postulatul paralelelor, Leibniz observă că, potrivit *principiului rațiunii suficiente*, neexistând nici un argument valid pentru a presupune că spațiul n-ar fi uniform, spațiul trebuie în mod necesar să fie uniform. El presupune deci că nu există în spațiu ordine particulare de situări, proprietăți metrice particulare. În limbajul dezvoltat ulterior de Riemann, descris aici în capitolul 4, Leibniz presupune că spațiul e plat, adică lipsit de curbură.

Am putea spune că Leibniz întrezărește posibilitatea de a structura geometric spațiul, dar că apoi nu găsește argumente suficiente pentru a o face. Argumentele le va impune Riemann, observând că, probabil, ele sunt determinate de forțele care acționează în spațiu; în teoria relativității generale, Einstein va presupune că, în prezența unei mase, spațiul se curbează (vezi capitolul 4).

GEOMETRIA DEVINE MODERNĂ

Observațiile filozofice ale lui Leibniz au fost dezvoltate din punct de vedere matematic de Gauss în teoria suprafețelor, pe care o voi discuta în capitolul 3, iar apoi în opera fundamentală a lui Riemann (despre care voi discuta în capitolul 4). Suntem

* V. de Risi, *Leibniz on the Parallel Postulate and the Foundations of Geometry*, Basel/Boston, Birkhäuser 2015. (*N. tr.*)

în secolul XIX și asistăm la un progres net în toate zonele cunoașterii umane: spiritul și modul de abordare clasice sunt depășite, se afirmă acum o viziune modernă, încă prezentă în multe discipline.

Ne putem face o idee despre revoluția survenită comparând cuvintele folosite de Immanuel Kant în *Critica rațiunii pure* cu acelea ale lui Bernhard Riemann din disertația *Ipotezele care stau la baza geometriei.*

Kant scrie:

> Spațiul nu este un concept empiric care să fi fost scos din experiențe externe [...] trebuie ca reprezentarea de spațiu să fie pusă ca fundament. Prin urmare, reprezentarea de spațiu nu poate fi scoasă prin experiență din raporturile fenomenului extern.*

Iar câțiva ani mai târziu, Riemann:

> Se pune, prin urmare, problema de a căuta datele cele mai simple din care să se poată deduce relațiile dimensionale ale spațiului [... sistemul] cel mai important pentru scopul urmărit de noi este acela pe care s-a bazat Euclid. Faptele acestea nu sunt necesare, ci au doar certitudine empirică, adică sunt ipoteze.**

Articolul lui Riemann e considerat una dintre cele mai importante opere matematice, comparabil ca anvergură cu lucrările contemporane ale lui Marx în domeniul social și economic sau cu acelea ale lui Darwin în biologie și în știința vieții. În timp ce progresele acestor ultime discipline au devenit repede monedă curentă în multe sectoare, acelea ale teoriilor matematice, inclusiv ale geometriei, s-au răspândit și au fost aplicate aproape exclusiv în aria științelor mai pure, fără a intra în bagajul

---

* I. Kant, *Critica rațiunii pure*, trad. E. Bagdasar și E. Moisuc, Ed. Univers enciclopedic, 2009. (*N. tr.*)

** B. Riemann, *Ipotezele care stau la baza geometriei*, trad. E. Gergely, Ed. Tehnică, 1963. (*N. tr.*)

cultural comun. Cu siguranță, deplasarea interesului de la figurile din spațiul tridimensional obișnuit spre natura ontologică a spațiului însuși, prilejuind, în particular, conceperea unor structuri ontologice diferite, le permite cercetătorilor pregătiți pentru un asemenea demers să depășească barierele spațiale ale propriilor discipline, dar, în termenii folosiți de Platon pentru Thales, nu ajută la cercetările despre „cele de dinainte și din dreptul picioarelor".

Sunt multe teoriile noi care se dezvoltă și se afirmă la finele secolului XIX într-o Europă care și-a încheiat formarea statelor naționale și începe să se creeze ca entitate supranațională. E posibil ca tocmai aceste noi teorii și ideologiile lor să stea la baza procesului de unificare europeană – încă nefinalizat și încă pus în discuție. Geometria își aduce și ea contribuția: îmi face plăcere să semnalez în acest context trei matematicieni legați, firește, de națiunile de care aparțin, dar participând, în același timp, la crearea unei culturi comune, fie prin intermediul schimburilor științifice, fie prin controverse neîmpăcate: italianul Eugenio Beltrami, germanul Felix Klein și francezul Henri Poincaré.

La originea polemicii se află lucrările lui Beltrami, profesor la Pavia și, în 1899, chiar senator al nou-constituitului regat al Italiei. La Pisa, apoi și la Göttingen, îl întâlnește pe Riemann și, împreună cu colegul său, Felice Casoratti, începe să-i studieze atent lucrările. Cei doi devin conștienți de uriașa semnificație inovatoare a operei lui Riemann, dar și de complexitatea ei ascunsă. Beltrami scrie apoi un *Eseu despre interpretarea geometriei neeuclidiene** în a cărui introducere afirmă că

> în vremea din urmă, publicul matematic a început să se ocupe cu unele concepte noi care, dacă se vor impune, par destinate să schimbe în profunzime întregul țesut al geometriei clasice.

* E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, în «Giornale di Matematiche», vol. VI, 1868, pp. 284–322. (*N. tr.*)

În eseul său, Beltrami pleacă de la câteva rânduri din disertația lui Riemann pe care le întregește dându-le o interpretare ce-i permite să introducă primul model valid al geometriei hiperbolice, o geometrie neeuclidiană (în care, deci, nu e valabil postulatul paralelelor). Voi analiza construcția lui mai amănunțit în capitolul 4.

Beltrami merge de mai multe ori la Göttingen, chiar și după moartea lui Riemann, și discută cu Felix Klein. Acesta din urmă propune, într-o bine-cunoscută lucrare, construcția unui model al geometriei hiperbolice identic cu cel care se află într-o secțiune a articolului lui Beltrami – scris în italiană – fără măcar să-l citeze.

În același timp, Poincaré construiește un model hiperbolic diferit de al lui Klein, dar și acesta identic cu unul dintre modelele care apar în eseul lui Beltrami.

Ignorându-l complet pe Beltrami și articolul său, Poincaré și Klein pornesc o *querelle* pe marginea paternității acestei descoperiri, dispută în urma căreia Klein, victimă a unei epuizări nervoase, se retrage din matematica activă.

Rolul lui Beltrami ca adevărat părinte al acestor modele a fost recunoscut abia recent de matematicianul american John Milnor, printre altele și laureat al Medaliei Fields în 1962.

Se poate așadar spune că descoperirea geometriilor neeuclidiene e pe de-a-ntregul operă europeană – în sensul pe care-l dăm azi cuvântului *Europa* – chiar dacă atribuirile nu sunt de tot limpezi. În capitolul 4 voi expune câteva dintre ideile lui Klein și Poincaré, doi matematicieni foarte prolifici ale căror opere au determinat progresul geometriei până în zilele noastre, cu un impact puternic asupra culturii contemporane.

În 1902, Poincaré scrie un comentariu celebru prilejuit de reflecțiile lui pe marginea noutăților introduse de Riemann și a diferitelor teorii geometrice care s-ar putea naște din ele: „o geometrie nu poate fi mai adevărată decât alta, poate fi doar

mai convingătoare"*. În aceste cuvinte se împiedică Benedetto Croce care, pricepând foarte puţin din matematică, declară ritos că:

> ştiinţele naturale şi disciplinele matematice au cedat de bunăvoie filozofiei privilegiul adevărului, ele mărturisind resemnate, de nu chiar surâzătoare, că operează cu concepte comode, de utilitate practică, concepte care nu au nici de-a face cu reflecţia asupra adevărului**.

E bine ştiut că gândirea şi activitatea lui Croce au împiedicat dezvoltarea şi predarea culturii ştiinţifice în Italia. În particular, incapacitatea lui de a înţelege matematica şi geometria – incapacitate convertită în antipatie – l-a făcut să se războiască frecvent cu matematicianul şi filozoful Federigo Enriques. Acesta din urmă, preşedinte al Societăţii Italiene de Filozofie, a organizat în 1911 la Bologna al IV-lea Congres internaţional de filozofie la care a invitat, printre alţii, filozofi de talia lui Bergson, Einstein, Poincaré. Croce, aflat şi el printre invitaţi, l-a criticat feroce pe Enriques pentru a fi acordat prea mult spaţiu ştiinţei. Polemica a continuat timp de câţiva ani, alimentată şi de discipolul lui Croce, filozoful Giovanni Gentile, ministru al Instrucţiunii Publice, şi a dus la înfrângerea (temporară) a celor interesaţi de ideile moderne ale lui Enriques despre reforma şcolii şi a universităţii în favoarea bine-cunoscutei reforme Gentili.

În încheierea acestui capitol introductiv, semnalez cititorului articolele despre conceptele de curbă şi de suprafaţă din *Enciclopedia Italiana*. Au fost scrise în mare parte de Enriques şi reprezintă, după mine, un exemplu minunat de popularizare a ştiinţei la un nivel înalt. Cât despre ideile care stau la baza

* H. Poincaré, *Ştiinţă şi ipoteză*, trad. Constantin Popescu-Ulmu, Ed. Ştiinţifică şi enciclopedică, 1986. (*N. tr.*)

** B. Croce, *Indagini su Hegel e schiarimenti filozofici* (1952), Bibliopolis, 1998. (*N. tr.*)

geometriei, despre care am vorbit la început și despre care vom tot vorbi pe parcursul cărții, Enriques scrie:

> în ultimă analiză, atunci când încercăm să deducem din experiența fizică postulatele dreptei [sau ale altor idei geometrice, *N. a.*], trebuie să ținem cont nu atât de datele factuale ale experienței, cât de exigențele simplificatoare ale minții noastre care se reflectă în ele.

Cu această frază invit cititorul să reflecteze la întrebarea dacă, într-adevăr, în ultimă analiză, abordarea umană a înțelegerii spațiului e orientată către *simplificarea* nenumăratelor feluri de diversitate și complexitate oferite de lumea naturală; către introducerea de idei și concepte „simple" (dar nu în mod necesar elementare) care permit o viziune unitară asupra atâtor fenomene și posibilitatea clasificării în doar un număr finit de clase a infinitei multiplicități a formelor din natură.

Cred că observația lui Enriques poate fi aplicată și problemelor legate de felul cum elaborează mintea noastră gustul estetic, cum ajungem să decidem că ceva e frumos. Adesea, dacă nu întotdeauna chiar, ceva ne place pentru că e simplu, imediat și permite în plus evocarea unor forme și structuri complexe. Nu e deci de mirare că atâția geometri atribuie descoperirilor lor o frumusețe aparte și-și continuă cercetările cu unicul scop declarat de a le face și mai frumoase.

Mulți matematicieni compară cercetarea matematică cu o excursie în munți. Recent, matematiciana iraniană Maryam Mirzakhani (1977–2017, *n. tr.*) declara într-un interviu:

> Sunt un om care gândește încet, iau o problemă aparent insolubilă și o îmblânzesc prin perseverență, observând-o din diferite puncte de vedere, unele noi. [...] Momentul cel mai frumos e acela al descoperirii, senzația de a fi ajuns în vârful unui pisc de unde te bucuri de o panoramă încă virgină. Dar, în cea mai mare parte a timpului, pentru mine, a face matematică e ca o excursie lungă, fără vreo potecă

> marcată, fără o țintă vizibilă. [...] Adesea studenții urăsc ecuațiile și figurile geometrice fără măcar să încerce să se lase seduși. Frumusețea matematicii se dezvăluie doar celor care o urmăresc cu răbdare. [...] Trebuie să nu iei în seamă fructele ușor de cules, acelea din josul coroanei pomului.

Mirzakhani e prima femeie, și unica deocamdată, care a primit medalia Fields, în 2014.

În aceeași perioadă în care Enriques descoperea lumea magică a suprafețelor algebrice (vezi capitolul 4), un ghid alpin din zona mea natală, Bruno Detassis, cucerea nouă vârfuri din Dolomiții Brenta, deschizând *trasee de-a lungul pereților* care azi încă îi poartă numele. Peste două sute de trasee printre care faimosul Drum al călăuzelor, pe Crozzon-ul brentan, și Pala del Rifugio, în San Martino, acesta din urmă în colaborare cu Ettore Castiglioni.

După cum povestesc elevii lui cățărători, Detassis susținea că, pentru escaladă, ai nevoie de o bună pregătire fizică și de o mare pasiune, dar mai ales de o minte foarte bună. Ca să explice cum își alege traseul pe un perete folosea adesea următorul aforism: „să cauți ce-i ușor în ce-i complicat". Aceeași abordare ca a lui Enriques!

Mi-aș dori ca următoarele capitole să fie un ghid plăcut al traseelor desenate de-a lungul pereților geometriei de matematicieni faimoși care, pe parcursul a peste două mii de ani, au căutat drumuri „ușoare în ce-i complicat". Sper să ajute la parcurgerea lor cu pasiune și cu plăcere.

2. Curbe

LA ÎNCEPUT A FOST PUNCTUL

Originea a tot și a toate e punctul – așa credea și Euclid care-și începe *Elementele* tocmai cu următoarea definiție:

> Definiția 1. Punctul e ceea ce nu are nici o parte.

Punctul, obiectul geometric cel mai simplu, e plasat la începutul discuției ca monadă inițială de la care se pleacă pentru a construi întreaga geometrie.

Specificația *ceea ce nu are nici o parte*, altfel spus, care nu mai poate fi divizat în părți mai mici, devine însă și o ipoteză fundațională pentru metoda logico-deductivă. De la Euclid încoace ne-am obișnuit ca, pe baza acestei metode, să studiem obiecte complexe descompunându-le în părți mai simple; e un procedeu tipic și probabil caracteristic al speciei noastre umane.

În definiție se postulează că nu se poate coborî mai jos de punct, mai mult de-atât nu se poate simplifica.

Ceea ce nu înseamnă, după cum vom vedea mai departe, că pe parcursul procesului de reducere la punct nu putem folosi anumite caracteristici ale obiectului mai complex care vor îmbogăți punctul cu proprietăți fundamentale pentru teoria considerată.

Acest „acord logic" de plecare e prezent în aproape toate teoriile care au ca scop cunoașterea (a ceva). Să ne gândim de exemplu la teoria modernă a big bang-ului cu care fizica încearcă să

explice naşterea şi evoluţia universului nostru. Se postulează în ea un început în care totul e concentrat într-un punct; în fracţiuni infinitezimale de secundă, acest punct explodează – astfel începe *Totul*. Iar în această teorie, despre punctul iniţial şi despre primele fracţiuni infinitezimale de secundă nu putem spune nimic.

Ceva mai mult reuşesc să spună, în limbajul artei, poeţii şi scriitorii, ca de exemplu Italo Calvino în povestirea *Tutto in un punto*, a patra din *Cosmicomiche*. Povesteşte Qfwfq despre perioada de început, când totul era concentrat într-un punct:

> Bineînţeles că stăteam cu toţii acolo, [...] înghesuiţi ca sardelele. [...] Fiecare punct al fiecăruia dintre noi coincidea cu fiecare punct al fiecăruia dintre ceilalţi. [...] Deşi poate părea ciudat, această situaţie nu era de natură să ne facă prea sociabili; nu ne spuneam nici măcar bună ziua sau bună seara. Fiecare avea relaţii doar cu un număr restrâns de cunoştinţe. Eu îmi aduc aminte mai ales de doamna Ph(i)Nko. [...] A fost de-ajuns ca ea să spună la un moment dat: „Băieţi, dacă aş avea puţin spaţiu, ce tagliatelle grozave v-aş mai face!" Şi în clipa aceea, toţi ne-am gândit la spaţiul pe care l-ar fi ocupat braţele ei rotunde mişcându-se înainte şi înapoi cu făcăleţul peste foaia de cocă. [...] în timp ce doamna Ph(i)Nko pronunţa cuvintele „...ce tagliatelle, măi băieţi!" – punctul care o conţinea pe ea şi pe noi toţi se dilata [...] noi eram aruncaţi în cele patru colţuri ale universului [...] iar ea era descompusă în nu ştiu ce fel de fel de energie lumină căldură [...] ea care a fost capabilă de un elan generos [...] un adevărat elan de dragoste universală, dând naştere în acelaşi timp noţiunii de spaţiu şi spaţiului propriu-zis, şi timpului, şi gravitaţiei universale.*

Calvino sugerează aici că, deşi nu se mai poate reduce, punctul conţine informaţii care sunt fructul unei istorii viitoare, al unor

* I. Calvino, *Totul într-un punct*, în *Cosmicomicării*, trad. de Sanda Şora, Ed. Univers, 1970. (*N. tr.*)

concepte care se vor dezvolta în viitor şi de care va trebui să ţinem seama în procesul cunoaşterii. Calvino pune în punct cuvinte precum socializare, mişcare, lumină, căldură ... ba chiar şi tagliatelle!

O mare parte din geometria modernă se ocupă de puncte sau, mai bine, de *puncte grase* (*fat points*) sau *scheme zero-dimensionale*, adică puncte care încorporează caracteristici şi calităţi ale unor obiecte mai complexe. Deocamdată, să considerăm punctul ca în definiţia lui Euclid, ceva de la care se pleacă, dar despre care altceva nu putem spune. Mai târziu, studiind obiecte geometrice mai sofisticate, s-ar putea să fie util să vorbim despre natura punctelor lor, în particular a unora mai semnificative.

DIN NOU ÎN GRECIA, ORIGINEA LUCRURILOR

Curbele sunt un obiect de studiu din geometrie foarte vechi şi central în întreaga istorie a gândirii matematice. În limbaj comun, curbă e o linie care nu e dreaptă; în evoluţia limbajului matematic, care tinde mereu să elimine excepţiile imprimând noţiunea de continuitate, cuvântul *curbă* a devenit sinonim cu linie, iar dreapta e un caz particular de linie.

În Grecia antică, mai ales în şcoala lui Pitagora din Metapont (fondată în 540 î.Cr.), se considera că o curbă e constituită din puncte-monade, corpusculi elementari cu întindere foarte mică; cunoaşterea era empirică pe vremea aceea, încă nu fusese „raţionalizată" sau abstractizată.

În acelaşi timp, aproape de Metapont, la şcoala din Elea (acum în provincia Napoli), Parmenide şi Zenon studiau concepte geometrice dintr-un punct de vedere tot mai apropiat de ideal, susţinând că punctul nu are întindere, că linia nu se obţine punând laolaltă puncte şi e doar lungime lipsită de lărgime, că suprafaţa nu are grosime şi aşa mai departe.

După cum ne povestesc manualele de filozofie, direcţia raţionalistă şi abstractă a fost criticată şi atacată violent de

sofişti – ca Protagoras din Abdera, de exemplu. Acesta susţinea că liniile adevărate au o anume lărgime şi diferă de conceptul matematicienilor. Cercul trebuie deci să aibă în comun cu tangenta nu doar un punct, ci un întreg mic segment, aşa cum reiese în mod empiric observând o roată care lasă pe stradă o urmă de forma unui mic segment.

Aristotel îşi însuşeşte adesea observaţiile critice ale sofiştilor; se ajunge apoi la poziţii extreme ca aceea a lui Sextus Empiricus, din curentul scepticilor, care scrie chiar o carte intitulată *Adversus geometras* (*Împotriva geometrilor*).

Între timp, filozofii raţionalişti, precum Democrit şi Platon, se inspiră mereu mai mult din matematică şi geometrie, susţinând realitatea inteligibilelor sau a ideilor; cuvântul grecesc *ιδεα* (idee) însemna la origine „schemă sau figură matematică".

Dezvoltarea, alături de viziunea empirică, a unei viziuni mai raţionale sau ideale are loc în acelaşi timp cu o altă mare schimbare culturală. Cunoaşterea, discutată şi transmisă pe cale orală (*epos*), începe să fie notată în scris (*logos*), putându-se deci conserva şi transmite cu ajutorul papirusurilor. Alăturarea dintre *logos* şi *epos*, pe care ne place s-o considerăm începută odată cu Homer, îşi găseşte o perfectă împlinire la Platon, Arhimede, Aristotel şi alţii.

Asemenea *Metodei* lui Arhimede sau *Conicelor* lui Apollonius, *Elementele* lui Euclid sunt primele exemple de formalizare scrisă a unei metode care constă în a lua anumite concepte fundamentale, înscrise cumva în mintea noastră, poate prin intermediul experienţei, şi a le formaliza în manieră abstractă şi *a priori* prin mijlocirea câtorva, puţine, definiţii şi postulate clare şi necontradictorii. A doua definiţie a *Elementelor* e cea pentru curbă, sau linie.

Definiţia 2. Linia e lungime lipsită de lărgime.

Puţin mai departe, găsim o altă definiţie a liniei:

Definiţia 5. Suprafaţa e ceea ce are lungime şi lărgime.

Definiţia 6. Extremităţile unei suprafeţe sunt linii.

Să observăm aici o dihotomie prezentă adesea în geometrie: linia poate fi descrisă în sine sau ca parte a unui alt obiect.

Dintre curbe, Euclid trece repede la aprofundarea conceptului de (linie) dreaptă, cu o definiție și două postulate:

> Definiția 4. Linia dreaptă e aceea care stă la fel față de toate punctele ei.
>
> Postulatul 1. A duce o dreaptă dintr-un punct în altul.
>
> Postulatul 2. A prelungi fără soluție de continuitate o dreaptă mărginită într-o dreaptă.

Definițiile 2 și 4, dimpreună cu postulatele 1 și 2, definesc în mod precis dreapta. Punctul de vedere al lui Euclid – același cu al geometriei contemporane, de fapt – poate fi rezumat după cum urmează: fiecare dintre noi are ideea lui despre ce e linia dreaptă, dar pentru a discuta și pentru a dezvolta cunoașterea comună, formalizăm patru caracteristici pe care dreapta trebuie să le aibă și asupra lor ne punem de acord fără nici un fel de ambiguitate.

După mai bine de două mii de ani, abordăm exact la fel geometria: un manual pentru școlile primare scris de colegul Herbert Clemens împreună cu fiul lui, *Geometry for the classroom*, se deschide cu definiția dreptei ca obiect caracterizat de următoarele proprietăți:

1. Se extinde la infinit în două direcții (postulatul 1).
2. Date două puncte distincte, există o dreaptă și numai una singură prin cele două puncte (postulatul 2).
3. Date două puncte pe o dreaptă, drumul cel mai scurt pentru a merge de la un punct la celălalt e dreapta însăși (dreapta e o geodezică) (definiția 4).
4. Dacă scoatem un punct de pe o dreaptă, rămân două părți separate (definiția 2).

Așadar, dacă schimbăm doar un pic cuvintele, găsim aceleași concepte ca la Euclid.

Cu aceste patru proprietăți, toți sunt în stare să distingă o dreaptă fără nici o ambiguitate: e de ajuns să privim figura 2.1.

Prima imagine reprezintă o dreaptă (simbolul săgeţii vrea să spună că dreapta se prelungeşte la infinit). Dar celelalte trei – nu: a doua are un capăt, e o semidreaptă. În a treia, e evident că între unele dintre punctele ei drumul cel mai scurt nu e cel de pe curbă. În a patra, dacă se scoate un punct, nu rămân două bucăţi separate (curba desenată are grosime).

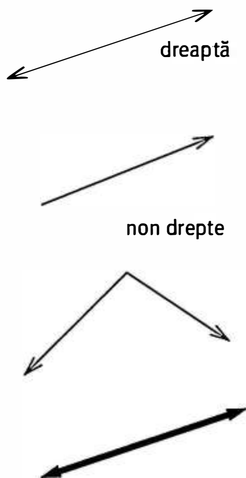


Figura 2.1

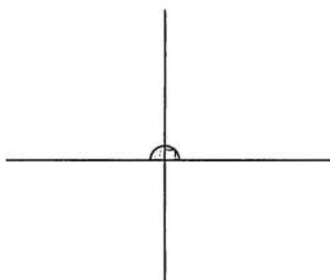
Pe lângă cele patru caracteristici ale dreptei, Euclid adaugă o a cincea, faimosul postulat al cincilea despre dreptele paralele. Pentru a-l formula, avem nevoie de câteva definiţii pe care o să le luăm tot din *Elemente*, dar nu chiar literal.

> Definiţia 8. Unghiul plan e înclinarea reciprocă a două drepte incidente într-un punct numit vârf.

> Definiţia 9. Dacă cele două drepte care compun unghiul coincid, atunci unghiul se numeşte plat, iar măsura sa e π (în radiani; se poate alege şi măsura în grade, anume 180 de grade).

Unghiurile mai mici au măsuri proporţionale; de exemplu, avem următoarea definiţie:

> Definiţia 10. Când o dreaptă ridicată pe o alta formează unghiuri adiacente egale între ele, fiecare unghi format se numeşte drept şi are măsura $\pi/2$ (90 de grade) (figura 2.2.).


Figura 2.2

Odată ce avem definiţia unghiului drept putem formula:

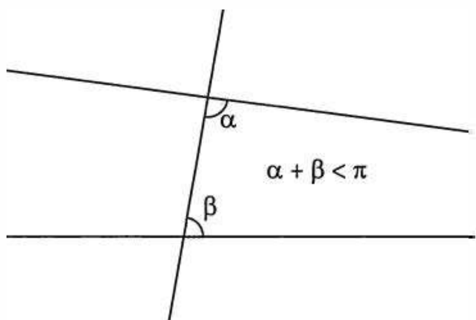


Figura 2.3

> Postulatul 5. Şi că atunci când o dreaptă care taie alte două drepte face cu ele în interior şi de aceeaşi parte unghiuri mai mici decât două unghiuri drepte, cele două drepte prelungite la infinit se întâlnesc de acea parte în care se află unghiurile mai mici decât două unghiuri drepte.

Postulatul acesta e echivalent cu următorul: date o dreaptă şi un punct exterior ei, există o unică dreaptă care trece prin acel punct şi e paralelă cu dreapta de plecare.

Timp de aproape două mii de ani, mulţi matematicieni şi filozofi au încercat să demonstreze că acest postulat s-ar putea cumva deduce logic din cele dinaintea lui. La sfârşitul secolului XIX s-a înţeles că postulatul al cincilea e independent şi nu poate fi dedus din precedentele, că acceptarea lui e parte integrantă a geometriei euclidiene. Negarea sa, ori, mai bine, o formulare diferită, duce la crearea geometriei neeuclidiene (pe care o vom discuta în capitolul 2).

Definiţiile şi postulatele sunt o încercare de a pune pe hârtie, într-un mod simplu şi necontradictoriu, ideile, formele geometrice ale lui Platon, acelea prezente cumva *a priori* în mintea noastră. Descrierea acestor forme fundamentale prin doar câteva proprietăţi le garantează o existenţă ideală şi ne permite să construim o ştiinţă universal acceptată care modelează realitatea şi o interpretează.

Odată ce avem conceptul de dreaptă – mai bine zis, odată ce-i cunoaştem cele patru proprietăţi caracteristice –, putem începe să facem geometrie folosind deducţii logice, adică să formulăm şi să demonstrăm propoziţii şi teoreme. Să luăm, de exemplu, cea mai cunoscută teoremă de geometrie, Teorema lui Pitagora.

Ca să o enunţăm, avem nevoie de câteva preliminarii pe care le derivăm din conceptul de dreaptă. O *semidreaptă* e dată de un punct de pe o dreaptă, numit *vârf*, şi de una dintre cele două părţi în care acel punct împarte dreapta; un *segment* e locul punctelor unei drepte conţinute între două puncte numite *vârfuri*; un *triunghi* e format din trei segmente în aşa fel încât fiecare vârf al unui segment e vârf al încă unuia şi doar al unuia singur dintre celelalte două.

Segmentele pot fi comparate prin suprapunere; în particular, alegând un segment predeterminat drept unitate de măsură, segmentele pot fi măsurate. De exemplu, un segment are lungimea de 3 metri dacă segmentul unitate de măsură a unui metru, determinat de Biroul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi de la Sèvres, se poate suprapune de trei ori, fără intersecţii şi fără spaţii goale, peste segmentul de plecare.

> *Teorema lui Pitagora.* Dat un triunghi cu unghi drept, fie a şi b lungimile segmentelor care formează unghiul drept (zise catete) şi c lungimea segmentului opus unghiului drept (ipotenuza) (figura 2.4). Atunci are loc următoarea identitate: $a^2 + b^2 = c^2$

Cu alte cuvinte, suma ariilor pătratelor construite pe catetele triunghiului e egală cu aria pătratului construit pe ipotenuză.

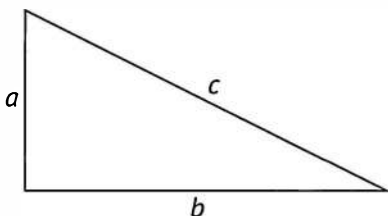


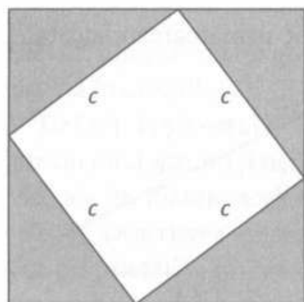
Figura 2.4

E, cu siguranţă, teorema cea mai faimoasă din istoria

geometriei; un rezultat folosit frecvent de ingineri, încă de pe vremea babilonienilor şi egiptenilor. Chiar dacă toţi aflăm despre el încă din gimnaziu, continuă să uimească prin originalitatea şi, aş îndrăzni să spun, prin extravaganţa enunţului; cui i-o fi venit în minte o asemenea relaţie? S-a observat probabil că relaţia era adevărată pentru nişte triunghiuri particulare, cum se vede, de exemplu, pe tăbliţa babiloniană reprezentată în primul capitol. Fantezia, combinată cu nu puţină îndrăzneală, i-a permis lui Pitagora să raţionalizeze experienţa şi să demonstreze enunţul pentru orice triunghi dreptunghic. În felul acesta însă se avansează periculos către lucruri pe care oamenii vremii aceleia nu le puteau stăpâni. Printre ele, faptul că diagonala unui pătrat de latură unitară are lungimea egală cu rădăcina pătrată a lui 2: acesta nu e un număr raţional, adică nu se poate exprima ca multiplu al unităţii de măsură sau ca fracţie a ei, ceea ce pitagoreicii numeau *incomensurabil*.

Există azi zeci de demonstraţii ale acestei teoreme; probabil că primele au fost obţinute prin simple manipulări ale ariilor, poate aranjând dale dintr-un pavaj, după cum sugerează figura 2.5.

Se iau două pătrate egale de latură $a + b$ şi din fiecare se scot patru triunghiuri dreptunghice egale, cu catetele a şi b, evidenţiate în gri, dar în două moduri diferite. Cum pătratele iniţiale au aceeaşi arie şi amândurora li se elimină aceleaşi



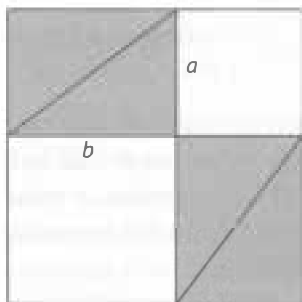


Figura 2.5

patru triunghiuri, părţile albe care rămân trebuie să aibă aceeaşi arie. Astfel, aria pătratului alb din desenul din stânga, care e pătratul construit pe ipotenuză, e egală cu suma ariilor celor două pătrate albe din desenul din dreapta, care sunt exact pătratele construite pe catete.

Cred că e bine să observăm că demonstraţia se sprijină pe câteva presupuneri geometrice, în particular pe definiţia pătratului şi pe posibilitatea de a-l construi. Un pătrat e un patrulater cu laturi egale şi cu patru unghiuri interne drepte. Existenţa şi posibilitatea construirii pătratului nu sunt deloc evidente; dimpotrivă, se poate demonstra că sunt echivalente cu Postulatul 5 al lui Euclid, cel despre paralele. Faptul a fost înţeles de Giovanni Girolamo Saccheri (1677–1733). Altfel spus, Teorema lui Pitagora e un rezultat care se poate demonstra dacă sunt valabile cele patru proprietăţi ale dreptei şi Postulatul 5, adică dacă ne situăm în ceea ce azi numim geometria euclidiană. Vom vedea mai încolo că teorema e falsă în geometriile neeuclidiene.

O CURBĂ DUPĂ ALTA

În *Elemente* sunt prezentate foarte multe curbe, începând cu cercul care e descris astfel:

> Definiţia 15. Cercul e o figură plană formată dintr-o singură linie, astfel că toate dreptele care o taie, trasate fiind dintr-un singur punct dintre cele din interiorul figurii, sunt egale.

Apollonius din Perga consacră un întreg tratat curbelor care se obţin ca intersecţii ale unui con cu un plan, motiv pentru care le numeşte (*secţiuni*) *conice* şi le distinge cu numele de *elipsă*, *parabolă* sau *hiperbolă*, în funcţie de poziţia planului care taie conul, ca în figura 2.6.

În Grecia antică erau studiate curbe speciale, folosite la rezolvarea unor probleme matematice. Conicele au fost studiate

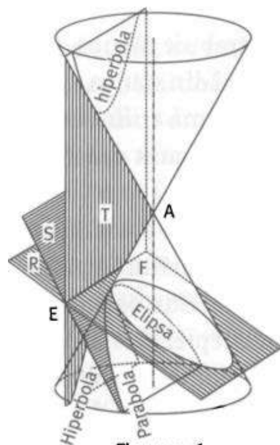
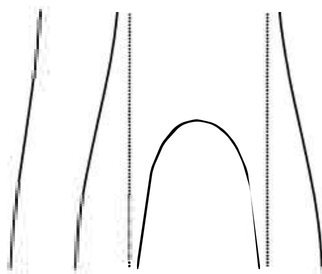


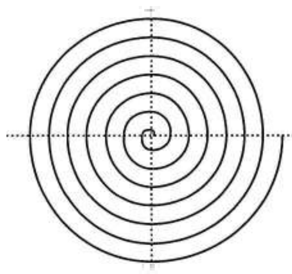
Figura 2.6

de Menechmos (380–320 î.Cr.) ca să rezolve problema duplicării cubului, adică pentru a găsi latura unui cub cu volum de două ori mai mare decât un cub dat. A propus o soluţie simplă, ca intersecţie a unei parabole cu o hiperbolă. Cu geometria analitică, pe care o s-o introducem curând, se vede uşor că $\sqrt[3]{2}$ se obţine ca intersecţie dintre parabola $y = 1/2\,x^2$ şi hiperbola $xy = 1$.

Se povesteşte că Menechmos, căruia Alexandru cel Mare i-ar fi cerut o metodă uşoară de a înţelege geometria, ar fi răspuns: „Pentru a călători dintr-un loc într-altul există drumuri pentru rege şi drumuri pentru popor, dar în geometrie nu există decât un singur drum pentru toţi."

Duplicarea cubului şi trisecţiunea unghiului sunt două dintre problemele faimoase de la Delphi, pentru care matematicianul Diocles (240–180 î.Cr.) construieşte curba cisoidă, iar Nicomede construieşte concoida. Pentru cuadratura cercului, Hippias (443–393 î.Cr.) şi Dinostratus (390–320 î.Cr.) studiază cuadratricea, iar Arhimede (287–212 î.Cr.) spirala. Figurile 2.7 şi 2.8 au fost preluate de pe pagina Universităţii St. Andrew: http://wwwhistory.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html.


Figura 2.7


Figura 2.8

Definiţia şi studiul obiectelor geometrice abstracte ridică problema existenţei lor reale; am amintit deja poziţia critică a şcolii sofiste.

Să aprofundăm problema întrebându-ne, de exemplu, dacă cercul există cu adevărat şi cum îl putem construi. O roată, profilul lunii pline şi atâtea alte forme se apropie de ideea de cerc, dar sunt cu adevărat cercuri? Cât despre construcţie, Euclid fentează problema postulând răspunsul.

Postulatul 3. Se trasează un cerc cu centru şi rază date.

În *Şcoala din Atena*, Rafael îl prezintă pe Euclid în timp ce desenează un cerc folosind un compas, adică un instrument articulat care păstrează fixă distanţa dintre puncte. De fapt, istoricii ştiinţei susţin că adevăratul compas e o invenţie arabă de după Euclid; dar un mecanism mai rudimentar, poate cu un fir inextensibil sau cu o bară metalică, fixate la o extremitate şi dând posibilitatea celeilalte extremităţi să se mişte, un asemenea instrument sigur le era cunoscut grecilor.

Se zice că Giotto şi-ar fi uimit maestrul, pe Cimabue, desenând cercuri perfecte cu mâna goală; găsim o sugestie despre cum ar fi putut proceda într-un filmuleţ amuzant de pe YouTube: https:// www.youtube.com/watch?v = zR3wbEudD1I.

Şi existenţa unei drepte care trece prin două puncte era presupusă de Euclid în primul postulat. În acest caz, problema construcţiei e, din multe puncte de vedere, mai complicată. Mulţi sugerează să folosim o riglă, adică o bucată de material tăiat în lungul unei linii drepte: dar cum se construieşte o riglă? Ajungem să ne întrebăm dacă se poate construi un compas pentru drepte, adică un mecanism articulat făcut din bare rigide prinse între ele la extremităţi şi ţinute eventual în acelaşi plan în care o extremitate se mişcă liber de-a lungul unei linii drepte.

O primă încercare în această direcţie a fost făcută chiar de James Watt (1736–1819), inventatorul maşinii cu aburi. În

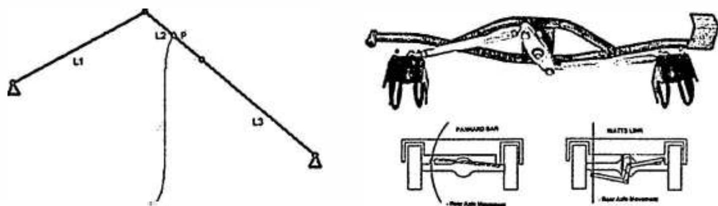


Figura 2.9

brevet, el a inserat și descrierea unui mecanism articulat cu trei bare, cunoscut azi drept paralelogramul lui Watt, în care punctul mobil central e constrâns să se miște aproape în linie dreaptă. Imaginea din stânga figurii 2.9 ilustrează mecanismul lui Watt. În dreapta, e desenată o aplicație care, la suspensiile automobilelor, exclude mișcările laterale nedorite în timpul oscilațiilor verticale ale osiei vehiculului.

Iată descrierea lui Watt însuși:

> Am întrevăzut modul în care pot face un piston să se miște în sus și în jos perpendicular fixându-l doar de o bucată de fier pe ax, fără lanțuri sau șanțuri perpendiculare [...], e unul dintre cele mai geniale și simple instrumente mecanice pe care le-am inventat.

Dar mecanismul nu generează o mișcare rectilinie veritabilă și, de fapt, nici Watt nu a susținut vreodată că ar face asta; el generează o curbă specială, numită „lemniscata lui Watt".

Primul mecanism adevărat care desenează o linie dreaptă a fost creat de un ofițer francez, Charles-Nicolas Peaucellier (1832–1913). E vorba despre un paralelogram articulat cu șapte bare (vezi figura 2.10). Barele patrulaterului *AQBP* sunt toate egale între ele, la fel și barele *OA* și *OB*. Punctul *O* e fixat de plan, în timp ce punctul *P* e constrâns să se miște pe o circumferință care trece prin *O* (prins de o bară fixată la cealaltă extremitate *O'*).

Construcția se bazează pe o transformare a planului care inversează punctele față de un cerc și transformă în drepte cercurile care trec prin centrul cercului de inversiune.

Descartes își pune problema generală de a găsi un compas mecanic, format din mai multe bare articulate între ele, pentru a desena orice curbă plană. Problema a fost rezolvată pozitiv în 1875 de B.A. Kempe, în articolul *On a General Method of Describing Plane Curves of the n-th Degree by Linkwork**. El demonstrează – și încă destul de simplu – că orice curbă *algebrică* plană poate fi desenată cu un mecanism articulat (*linkwork* în engleză); definiția curbei algebrice îi aparține lui Descartes și va fi discutată puțin mai departe.

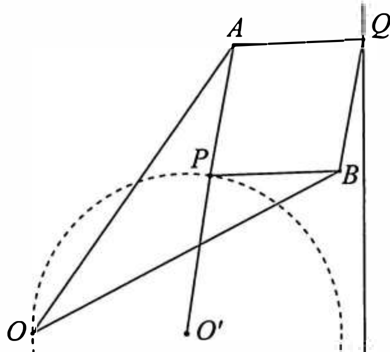


Figura 2.10

Rezultatul acesta are numeroase aplicații care azi sunt teme de cercetare centrale în ingineria mecanică. Să luăm, de exemplu, următoarea problemă: date nouă puncte în plan, se poate demonstra că există un mecanism cu patru bare care desenează o curbă care trece prin toate cele nouă puncte; dacă sunt mai mult de nouă puncte, e posibil ca problema să nu aibă soluție. Timp de zeci de ani, mulți ingineri au încercat să-și dea seama cum se pot găsi curba sau curbele care trec prin nouă puncte date și mecanismul care să o/le genereze. La sfârșitul secolului trecut, General Motors finanța asemenea cercetări pentru a produce ștergătoare de parbriz optime; în 1992, Andrew J. Sommese și alții au demonstrat că date fiind nouă puncte (în poziție generică), există cel mult 1 442 de posibilități; mai aproape de noi, în 2010, o nouă cercetare a redus numărul posibilităților la 64!

Putem deci să fim de acord că se pot construi cu rigla și compasul o dreaptă care trece prin două puncte și un cerc căruia i se precizează raza și centrul. Matematicienii din Grecia

* *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s1—7, nr. 1, 1875. (*N. tr.*)

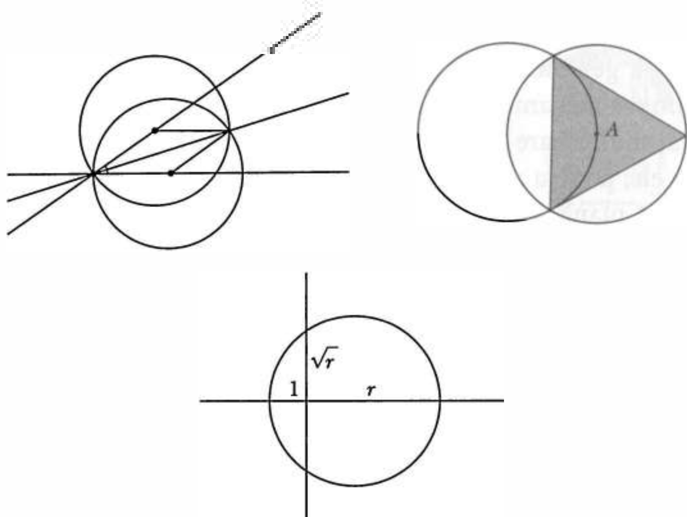


Figura 2.11

antică încercau să folosească aceste două instrumente pentru rezolvarea altor probleme; mai precis, încercau să *construiască cu rigla și compasul* puncte și figuri plane care să fie soluții ale unor probleme geometrice. Cu această metodă bisectau unghiul (adică găseau un unghi cu deschiderea egală cu jumătatea unuia dat), construiau triunghiuri echilaterale, găseau rădăcina pătrată a unei lungimi și câte altele. Sunt exerciții pe care învățăm să le rezolvăm în școală (figura 2.11 prezintă trei exemple).

De neînțeles la vremea aceea, construcțiile cu rigla și compasul nu reușeau să rezolve anumite probleme un pic mai generale, faimoasele probleme de la Delphi. Printre ele, trisecțiunea unghiului, construcția rădăcinii cubice a unui număr, construcția unui poligon regulat cu șapte laturi și cuadratura cercului (altfel spus, construcția unui poligon de arie π). Se povestește că problema construcției rădăcinii cubice a lui 2 ar fi apărut în urma cererii oracolului lui Apollo din templul din Delphi de a construi un altar de formă cubică, dublu față de cel existent.

Sunt probleme care nu se pot rezolva cu rigla și compasul, dar asta rezultă dintr-o teorie algebrică foarte profundă, creată abia două mii de ani mai târziu de Évariste Galois (1811–1832), care a legat căutarea rădăcinilor polinoamelor de teoria grupurilor.

Puțin înainte de Galois, matematicianul italian Lorenzo Mascheroni (1750–1800), în cartea *La geometria del compasso* (*Geometria compasului*), arătase că toate construcțiile cu rigla și compasul se pot face doar cu compasul. Fervent admirator al lui Napoleon, Mascheroni era coleg, la Universitatea din Pavia, cu Spallanzani și Volta. Teorema care afirmă că „baricentrele triunghiurilor echilaterale construite pe laturile unui triunghi oarecare, în exteriorul acestuia, formează un triunghi echilateral“ e azi atribuită lui Napoleon – deși mulți istorici sunt înclinați să creadă că a fost, de fapt, demonstrată de Mascheroni sau de matematicianul franco-torinez Giuseppe Luigi Lagrangia (Lagrange).

DESCARTES ȘI GEOMETRIA

În secolul XVII, doi mari matematicieni francezi, René Descartes (1596–1650) și Pierre de Fermat (1601–1665), au revoluționat teoria studiului curbelor și, în consecință, studiul geometriei. Nu e ușor de stabilit paternitatea atâtor descoperiri și a numeroaselor metode; de altfel, au fost chiar ei protagoniștii unei dispute feroce, descrise în multe cărți de istoria matematicii.

Într-o foarte cunoscută scrisoare din 1619, trimisă colegului fizician, filozof și medic olandez Isaak Beekman, Descartes scrie:

> astfel, nădăjduiesc să demonstrez că în cantitatea continuă, unele probleme se pot rezolva doar cu linii drepte și circulare; altele nu se pot rezolva decât cu linii curbe, dar create printr-o singură mișcare și de aceea pot fi trasate cu noile compasuri, pe care nu le socotesc mai puțin certe și Geometrice decât cele comune cu care se trasează cercuri; în fine, altele nu se pot rezolva decât cu linii curbe generate

prin mişcări diverse nesubordonate una alteia, care desigur sunt doar imaginare: precum binecunoscuta cuadratrice. Şi nu cred că poate fi imaginat ceva care să nu poată fi rezolvat cu astfel de linii; nădăjduiesc doar să demonstrez care probleme se rezolvă printr-o metodă şi nu prin cealaltă: astfel, în Geometrie să nu mai rămână aproape nimic de descoperit. Desigur, este o întreprindere nesfârşită, nu pentru o singură persoană. Pe cât de incredibilă, pe atât de ambiţioasă; dar am zărit o oarece lumină în haosul întunecos al acestei ştiinţe, cu ajutorul căreia cred că pot fi eliminate întunecimile cele mai de nepătruns.*

Aşadar, pe urmele tradiţiei greceşti, Descartes vrea să rezolve probleme matematice folosindu-se de curbe şi împărţind problemele în trei clase. Prima e cea a problemelor rezolubile cu rigla şi compasul. A doua, cea mai interesantă, adună toate problemele care se pot rezolva cu ajutorul curbelor ce pot fi trasate printr-o singură mişcare, deci cu *noile compasuri*; numeşte aceste curbe *admisibile* sau *geometrice*. În a treia clasă, grupează problemele care nu sunt în primele două şi le numeşte curbe *imaginare* sau *mecanice*, printre care cuadratricea şi spirala.

Descartes consacră mult timp construirii efective a noilor compasuri; printre ele, *trisectorul*, care desenează o curbă care împarte un unghi în trei părţi egale (vezi figura 2.12).

Să începem prin a introduce ceea ce azi numim *sistemul de referinţă* (sau *de axe*) *cartezian* şi *coordonatele carteziene*. Dat un plan, considerăm în el o pereche de drepte r şi r' care se taie perpendicular într-un punct 0. Oricărui punct P din plan îi asociem acum o pereche de numere (x,y), coordonatele sale carteziene în acest sistem de referinţă. Mai precis, x corespunde distanţei de la 0 la punctul de intersecţie al lui r cu dreapta prin P perpendiculară pe r, în timp ce y corespunde distanţei de la 0 la punctul de intersecţie al lui r cu dreapta prin P perpendiculară pe r'.

* R. Descartes, *Corespondenţa completă*, ediţie îngrijită de Vlad Alexandrescu, vol. I, Ed. Polirom, 2014. (*N. tr.*)

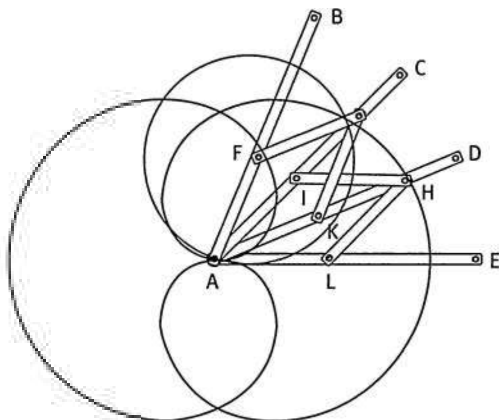


Figura 2.12

Lumina pe care a văzut-o Descartes e ideea de a gândi o curbă din plan ca pe o ecuație, astfel dând naștere ramurii din matematică pe care azi o numim *geometrie analitică* sau *geometrie algebrică*. Să citim fragmentul din *Géométrie* (Cartea a 2-a) în care introduce acest concept:

> Aș putea arăta aici multe alte mijloace pentru a trasa și a concepe liniile curbe care ar fi de grade din ce în ce mai compuse, până la infinit; dar pentru a cuprinde la un loc toate curbele care sunt în natură și pentru a le separa pe rând în anumite genuri, eu nu știu altceva mai bun decât să spun că toate punctele curbelor care pot fi numite geometrice [...] sunt cu necesitate într-o anumită o relație cu toate punctele unei linii drepte, relație care poate fi exprimată printr-o ecuație, aceeași pentru toate punctele.*

În continuare, Descartes își precizează ideea propunând ca, odată fixat un sistem de referință, o curbă din plan să fie determinată de punctele ale căror coordonate carteziene (x,y) satisfac o ecuație $f(x,y) = 0$, unde $f(x,y)$ e o funcție de variabilele x și y.

* Descartes, *Geometria*, trad. Al. Giuculescu, Ed. Științifică, 1966. (*N. tr.*)

De exemplu, ecuația $3x-2y+6=0$ descrie o dreaptă, în timp ce ecuația $x^2+y^2-1=0$ descrie un cerc.

Funcția $f(x,y)$ e *ecuația carteziană* a curbei. Dacă funcția e un polinom, curba e *algebrică*, iar gradul polinomului se numește *gradul* sau *ordinul curbei*.

Trebuie observat că atunci când Descartes vorbește despre funcții, el subînțelege funcții care se pot exprima ca polinoame; de altfel, curbele pe care, inițial, le numise geometrice, adică acelea care se pot construi cu noile compasuri, sunt de fapt curbe algebrice, după cum a demonstrat Kempe în teorema pe care am menționat-o deja.

Nu toate funcțiile sunt polinomiale, gândiți-vă, de exemplu, la funcția exponențială sau la funcțiile trigonometrice; toate aceste funcții, zise și transcendente, apar la câțiva ani după Descartes, odată cu lucrările lui Leibniz, Newton și mulți alții care creează calculul diferențial și integral.

În acest paragraf și în cel care urmează, vom considera doar curbe definite de ecuații polinomiale.

Uneori e posibil ca, după manipulări algebrice convenabile, din ecuația $f(x,y)=0$, să exprimăm una dintre variabile în funcție de cealaltă. De exemplu, din $3x-2y+6=0$ se obține ușor $x=x(y)=2/3y+2$, dar și $y=y(x)=3/2x+3$. În acest caz, spunem despre curbă că e descrisă ca *grafic* (al variabilei dependente în funcție de cea care variază liber). Descrierea unei curbe ca grafic e foarte utilă, dar nu e posibilă decât în anumite condiții de regularitate, studiate într-un rezultat celebru de matematicianul italian Ulisse Dini (1845–1918): curba e un grafic într-o vecinătate a punctelor sale nesingulare, pe care le vom defini curând.

Definiția curbei ca loc geometric al zerourilor unei funcții o amintește pe a vechilor greci: frontieră sau limită a unei suprafețe.

Dacă, în schimb, gândim curba ca pe o mulțime de puncte sau monade, ori, echivalent, ca un punct în mișcare, curba se descrie ca fiind formată de acele puncte din planul cartezian ale căror coordonate $(x(t),y(t))$ sunt descrise de funcții $x(t)$ și

$y(t)$ depinzând de un parametru continuu t. Acestea se numesc *ecuațiile parametrice* ale curbei.

Ecuațiile $x(t) = 2t + 2$, $y(t) = 3t$, de exemplu, sunt ecuațiile parametrice ale dreptei pe care am descris-o mai înainte în forma carteziană $f(x,y) = 3x - 2y + 6 = 0$. Ecuațiile $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$ descriu, când variază parametrul t, cercul $x^2 + y^2 = 1$; să observăm că funcțiile acestea, zise trigonometrice, nu sunt polinomiale. Dar e posibil să găsim și ecuații parametrice ale circumferinței care se pot exprima prin (rapoarte de) polinoame, după cum vom vedea mai departe.

În *Geometria*, printre multe alte rezultate, Descartes demonstrează un fapt uimitor, anume că orice curbă de gradul al 2-lea e o conică (fiind însă atenți să numim conice degenerate și reuniunile de două drepte). Astfel, geometria greacă a conicelor e înglobată în această teorie mai generală, iar studiul conicelor se reduce pur și simplu la studiul polinoamelor de gradul al 2-lea în două variabile.

Apoi, Descartes se avântă în studiul curbelor de ordin superior, reconsiderând multe exemple clasice prin prisma definiției sale, producând și exemple noi. Printre acestea, *Folium*-ul (frunza), a cărei ecuație carteziană e $x^3 + y^3 = 3axy$, în timp ce ecuațiile parametrice sunt:

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3}, \qquad y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

Descartes a greșit desenul acestei curbe, convins fiind că se repetă identic în fiecare dintre cele patru cadrane; poate că din lipsă de experiență cu numerele complexe. Primul care a desenat corect *Folium*-ul, ca în figura 2.13, a fost Christiaan Huygens, despre care vom vorbi imediat.

Folium-ul lui Descartes e o curbă de gradul 3, o cubică, și se deosebește de cele de gradul 1 (dreptele) și 2 (conicele) prin aceea că are un *punct singular*. Există multe moduri, evident echivalente, pentru a defini singularitățile; ca să ne păstrăm în limitele metodei lui Descartes, le vom defini folosind conceptul de dreaptă tangentă la o curbă. Să observăm că *Folium*-ul

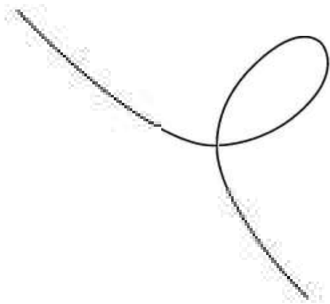


Figura 2.13

nu poate fi descris ca grafic într-o vecinătate a originii coordonatelor. Pentru detalii despre *Folium* și despre alte curbe introduse de Descartes și de Fermat, sugerez din nou pagina web a Universității St. Andrew, http://www-history. mcs. st-and.ac.uk/Curves/Curves.html.

Considerarea curbelor ca loc geometric al zerourilor unei ecuații introduce folosirea algebrei în studiul geometriei, clarificând și rezolvând extrem de eficient și riguros o mulțime de probleme; printre acestea, problema dreptelor tangente și a punctelor singulare.

Maniera aceasta revoluționară de a ataca geometria s-a impus rapid și a ajuns azi la un nivel surprinzător de rafinament și de abstractizare – vom reveni în capitolul 4.

Noutățile pe care le introduce Descartes sunt consecințe naturale ale noilor tehnici algebrice de căutare a rădăcinilor polinoamelor, dezvoltate cu succes în secolul XVI de matematicieni italieni, printre care Cardano, Tartaglia, Scipione dal Ferro și Ferrari.

O PROBLEMĂ DE TANGENȚĂ

Conceptul de dreaptă tangentă la o curbă într-un punct e foarte delicat și bogat în implicații matematice. Despre el, Descartes scria:

> cutez a spune că [a găsi tangenta la o curbă] e problema cea mai utilă și mai generală, nu numai pe care o cunosc, dar chiar și aceea pe care mi-am dorit vreodată s-o cunosc în geometrie.*

* Descartes, *Geometria*, Cartea a 2-a, trad. Al. Giuculescu, Ed. Științifică, 1966. (*N. tr.*)

În *Elemente*, Euclid dă definiția tangentei la un cerc; anume, în Definiția 2 din Cartea a III-a citim: „se spune că e tangentă la cerc o dreaptă care atinge cercul și nu îl taie când e prelungită“.

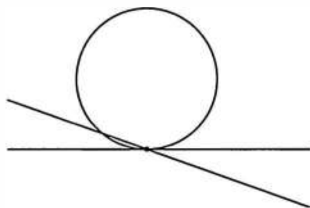


Figura 2.14

E vorba deci despre o dreaptă care pleacă dintr-un punct exterior și ajunge să aibă un punct comun cu cercul, iar apoi nu-l mai taie, adică nu mai ajunge într-un alt punct comun. S-ar mai putea spune că nu există nici o altă dreaptă între tangenta astfel definită și circumferință (figura 2.14).

Definiția lui Euclid pentru cerc se poate extinde la orice curbă algebrică plană – una diferită de o dreaptă: dat un punct pe curbă, considerăm toate dreptele care trec prin el; tangenta, dacă există, e acea dreaptă care are doar acel punct în comun cu curba (cel puțin într-o vecinătate mică). De fapt, Descartes folosește o metodă ușor diferită, anume caută un cerc care să aibă doar un punct în comun cu curba și definește tangenta ca fiind dreapta prin punct tangentă la cerc, folosindu-se de Euclid.

Considerarea curbelor în termeni algebrici permite punerea problemei într-un cadru general și găsirea unor soluții foarte precise. Intuiției geometrice îi ia locul calculul algebric abstract care, manipulat cu atenție, conduce în mod mecanic la soluția exactă. Ideea de bază e că dacă o dreaptă nu mai întâlnește după aceea curba, atunci trebuie s-o întâlnească în punctul de *multiplicitate* maximă.

Conceptul de multiplicitate algebro-geometrică e delicat și foarte mult studiat; încercăm în continuare să-l sugerăm măcar. Fixăm un sistem de referință cartezian cu originea în punctul curbei pe care vrem să-l studiem, deci fie $P=(0,0)$. Curba algebrică e definită ca punctele de coordonate (x,y) care satisfac ecuația $f(x,y)=0$; să presupunem că f nu e liniară, deci curba nu e o dreaptă. Dreptele care trec prin P sunt curbe de ecuație $sy-tx=0$, pentru anumite constante s și t.

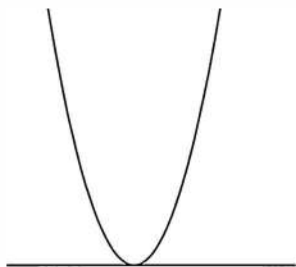
Punctele care sunt comune curbei și unei drepte se obțin ca soluții ale ambelor ecuații: $f(x,y)=0$ și $sy-tx=0$. Din a doua ecuație, îl scoatem pe y în funcție de x (sau pe x în funcție de y) și înlocuim în ecuația $f(x,y)=0$. În primul caz obținem un polinom în x, pe care-l notăm $p(x)$ și care depinde și de s, t; în celălalt caz, obținem un polinom în y, notat $q(y)$. Polinomul $p(x)$, respectiv $q(y)$, se anulează în 0 pentru toate valorile lui t și s, deoarece și curba, și dreapta trec prin $P=(0,0)$. Așadar, $p(x)$ și $q(y)$ se pot scrie sub forma $p(x)=x\cdot g(x)$ și $q(y)=\ y\cdot h(y)$, cu $g(x)$ și $h(y)$ polinoame care, la rândul lor, depind de t, s, adică de dreaptă.

E interesant că, pentru anumite drepte, unul dintre polinoamele g și h sau chiar ambele se anulează în 0. Dacă dreapta pentru care se anulează e unică, atunci P se numește *nesingular*, sau *neted*, sau *de multiplicitate unu*, iar *dreapta respectivă e tangenta în P la curbă*.

Dacă dreapta nu e unică, punctul se zice *singular*, ori *de multiplicitate mai mare ca unu*, ori *punct multiplu*; caz în care se poate arăta că 0 e rădăcină a lui $g(x)$ și $h(y)$ pentru orice dreaptă și deci orice dreaptă intersectează curba cu multiplicitate mai mare decât doi.

Tangenta se poate însă defini chiar și în punctele singulare. Intuitiv, e vorba despre dreptele care întâlnesc curba în punctul cu multiplicitate minimă.

Să analizăm trei exemple, primul va fi un punct neted, celelalte două vor fi puncte singulare.


Figura 2.15

Parabola de ecuație $y-x^2=0$ trece prin punctul $P=(0,0)$ care e neted, cu tangenta $y=0$ (figura 2.15).

Pentru demonstrație, să căutăm punctele comune pentru dreapta $y-tx=0$ și parabolă: înlocuind în ecuația parabolei valoarea $y=tx$, obținem polinomul $p_t(x)=x(t-x)$. Dar $g_t(x)=(t-x)$ se anulează în 0 dacă și numai dacă $t=0$; așadar, toate

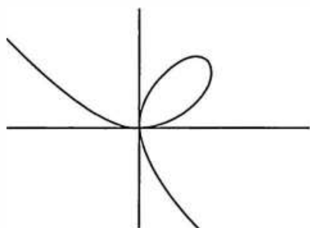


Figura 2.16

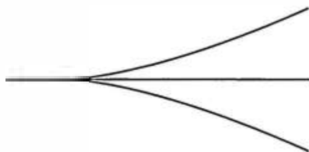


Figura 2.17

dreptele, cu excepția dreptei $y=0$, intersectează curba cu multiplicitate unu. Deci punctul neted și tangenta sa sunt date de dreapta $y=0$.

Folium-ul lui Descartes, de ecuație $x^3+y^3-3axy=0$, are în $P=(0,0)$ un punct singular (figura 2.16). Înlocuind y cu valoarea $y=tx$ în ecuația carteziană, obținem polinomul $p(x)=-3tax^2+(1+t^3)x^3=x(3tax+(1+t^3)x^2)$. Se observă că 0 e o rădăcină a polinomului $(3tax+(1+t^3)x^2)$, oricare ar fi valoarea lui t. Astfel, toate dreptele intersectează curba cu multiplicitate doi și punctul $P=(0,0)$ e singular. Cititorul interesat poate demonstra că dreptele $y=0$ și $x=0$ sunt unicele care întâlnesc *Folium*-ul cu multiplicitate trei, deci pot fi considerate ca fiind tangente: acest tip de singularitate se numește *nod*.

Un alt exemplu de punct singular e dat de curba de ecuație $y^2-x^3=0$ (figura 2.17). Punând $y=tx$ în ecuație, obținem polinomul $p(x)=t^2x^2-x^3$. Orice dreaptă taie curba cu multiplicitate mai mare decât doi, deci punctul $P=(0,0)$ e singular. Pentru $t=0$, polinomul se anulează cu multiplicitate trei, deci dreapta $y=0$ poate fi considerată tangentă în punctul cuspidal. În schimb, dreapta $x=0$ nu e tangentă la cuspidă. Acest tip de singularitate se numește *cuspidă*.

Folium-ul e, sub multe aspecte, un exemplu crucial în istoria gândirii matematice: Descartes și-a provocat adversarul, pe Pierre de Fermat, să-i studieze tangentele. Fermat, care tocmai punea la punct o altă metodă pentru construcția tangentelor, a acceptat provocarea și a ieșit învingător.

Calculul lui Fermat se baza pe un fel de prestidigitație folosită mai târziu și de alții, printre care Newton: introducerea, la început, a unui element E foarte mic, *infinitezimal*, împărțirea cu E (necesară pentru simplificare) și apoi reducerea lui la sfârșitul procesului, ca și cum ar fi 0.

Să luăm din nou exemplul parabolei $y=x^2$. Ca să calculăm panta tangentei într-un punct oarecare al ei (x,x^2), să considerăm coarda între punctele (x,x^2) și $(x+E,(x+E)^2)$. Panta acestei coarde e dată de

$$\frac{(x+E)^2-x^2}{(x+E)-x}=\frac{2xE+E^2}{E}=2x+E$$

Reducându-l pe E, obținem că panta tangentei în punctul (x,x^2) este $2x$, ceea ce confirmă calculul nostru dinainte în 0. Metoda se aplică ușor tuturor curbelor de ecuație $y=p(x)$, cu $p(x)$ polinom: în aceste cazuri, termenul de grad maxim în polinomul $p(x+E)$ se reduce cu cel din polinomul $p(x)$; ceilalți termeni pot fi deci împărțiți cu E. Când reducem toți termenii în E, mai bine spus, când îl facem pe E să tindă la 0, obținem panta tangentei la curbă sau, cum se va spune mai târziu, *derivata lui* $p(x)$ *în* x, notată $\dot{p}(x)$.

Procedeul acesta i-a înfuriat pe filozofii epocii, mai ales pe Thomas Hobbes, cărora li se părea că se afirmă că $2x+E=2x$ chiar dacă $E\neq0$. În termeni moderni, azi spunem că $\lim_{E\to0}(2x+E)=2x$, dar conceptul de limită a unei funcții apare mult mai târziu.

Eficacitatea metodei lui Fermat a dus la cvasi-ignorarea criticilor – în parte și pentru că, în general, speculațiile matematice ale lui Hobbes erau greșite.

Solicitat de provocarea lui Descartes, în 1638, Fermat își extinde metoda și la curbele date de o ecuație $f(x,y)=0$; pentru generalitatea acestor calcule ale sale, merită cu siguranță un loc printre fondatorii calculului diferențial.

Am definit deci punctele singulare ale unei curbe algebrice plane. Matematicienii extind acest concept la obiecte geometrice mai generale, cum sunt curbele din spațiu, sau suprafețele și varietățile de dimensiune mai mare – ne vom ocupa de

ele mai încolo. Foarte repede, ei descoperă cât de fascinant și de complex e studiul acestei noi idei geometrice, cât de utilă e pentru dezvoltarea matematicii și câte aplicații are în alte domenii. Treptat, prinde contur o teorie numită *teoria singularităților* sau *teoria catastrofelor*; pe la jumătatea secolului trecut, existau două mari școli care se confruntau în acest domeniu: școala franceză, condusă de René Thom, și cea rusă, condusă de Vladimir Arnold.

Primul obiectiv al acestor teorii e să înțeleagă bine singularitățile, adică să le clasifice. Clasificarea obiectelor de studiu e o activitate foarte atrăgătoare pentru specialiștii din orice domeniu științific – matematicienii nu fac excepție.

Dar ce înțelegem aici prin clasificare? Înțelegem atribuirea de caracteristici numerice fiecărui punct singular și împărțirea singularităților în clase definite de anumite valori numerice ale acestor caracteristici. O clasificare e completă dacă reușește să includă fiecare singularitate într-o clasă anume și dacă permite descrierea exhaustivă a fiecărei clase.

Să considerăm singularitățile curbelor algebrice plane pe care tocmai le-am definit. Putem să împărțim aceste singularități în clase conform multiplicității lor, un număr pe care l-am definit pentru fiecare punct al curbei. Punctele cu multiplicitate unu sunt cele netede, nesingulare. Se arată fără mare dificultate că un punct de multiplicitate doi poate fi, într-un sistem de coordonate convenabil, doar nod sau cuspidă.

Ca să mergem mai departe, construim exemple de singularități de multiplicitate trei și mai mare, până când ni se par suficiente pentru a descrie toate clasele posibile. Găsirea exemplelor e unul dintre aspectele cele mai creative și inovative ale matematicii; și e mai degrabă dificil, nu e ca și cum te-ai gândi la un măgar zburător sau la un înger cu aureolă. Fantezia trebuie menținută în limitele regulilor jocului, trebuie să satisfacă anumite cerințe și restricții (în acest caz, de exemplu, să avem o multiplicitate fixată) și trebuie exprimată limpede în limbajul universal și operativ al matematicii.

Arnold, Thom și alții au clasificat punctele singulare ale curbelor și ale suprafețelor. Clasificarea singularităților în dimensiuni superioare (chiar și numai în cazuri particulare) se numără printre rezultatele cele mai importante din geometria de azi.

Teoria catastrofelor își fixează și un al doilea obiectiv foarte ambițios: să studieze când un punct singular, al unei curbe sau al unui obiect de dimensiune mai mare, determină parțial sau integral întreaga curbă sau întregul obiect care-l conține. Ne aflăm în fața unei răsturnări de perspectivă: nu mai plecăm de la curbă, ci doar de la un punct al ei foarte special și ne întrebăm dacă el conține suficientă informație pentru a reconstrui curba. Vedem manifestată aici extraordinara capacitate a matematicii de a „inversa" raționamentul logic.

Exemplul următor ne poate da o idee despre cele de mai sus. Să presupunem că avem o curbă algebrică plană de gradul n, cu n întreg pozitiv, care are un punct singular de multiplicitate n; atunci, curba e formată dintr-o reuniune de n drepte care trec prin acel punct. Cititorul interesat poate găsi demonstrația în cartea lui Edoardo Sernesi, *Geometria 1*, în capitolul 34.*

Ideea că o singularitate, o catastrofă, poate determina obiectul sau fenomenul care o conține e ingenioasă și are foarte multe aplicații în numeroase domenii ale științei moderne. Să ne gândim la tranzițiile de stare din chimie, la extincții sau la mutațiile survenite în procesele vii, la găurile negre din fizică. Pe la jumătatea secolului trecut, mulți credeau că totul se poate reduce la „evenimente" excepționale sau singulare; ca urmare, a apărut teoria haosului, rezumată eficient de Edward Norton Lorenz (1917–2008), matematician și meteorolog, într-un titlu celebru al unei conferințe: *E posibil ca bătaia aripilor unui fluture în Brazilia să provoace o tornadă în Texas?*

---

* Sau în orice altă carte despre curbe algebrice, de exemplu în Philip A. Griffiths, *Introduction to algebraic curves*, Amer. Math. Soc., 1989. (*N. tr.*)

Un alt protagonist excepţional din secolul al XVII-lea, secol de aur pentru teoria curbelor şi pentru dezvoltarea matematicii, e, fără nici un dubiu, Galileo Galilei (1564–1642) care, împreună cu elevii lui, aplică teoria curbelor la probleme de mecanică şi, în general, de fizică. Metoda sa vine în continuarea concepţiei lui Platon şi a exploratorilor lumii ideilor, dar abia acum devine cu adevărat puternică afirmaţia că o teorie e validă din punct de vedere ştiinţific dacă şi numai dacă se poate reprezenta cu ajutorul unui model matematic.

Cărţile lui Galilei sunt pline de exemple şi de construcţii de curbe şi au meritul de a formula limpede problemele de fizică şi de a schiţa propuneri de soluţii bazate pe raţionamente matematice. Ele invită la citirea naturii cu ochii geometrului şi afirmă convingerea că natura abstractă şi complexitatea matematicii ne permit să depăşim graniţele teritoriului pe care-l locuim, aventurându-ne în explorarea universului.

Galilei nu e la fel de sistematic în studiul geometriei ca Descartes, contemporanul său care, se pare, îl admira mult; el utiliza geometria în mod clasic, fără să folosească puntea către algebră. Problemele legate de mişcarea şi căderea corpurilor grele pe care şi le pune reclamă de fapt o matematică mai complexă şi mai abstractă decât are el la dispoziţie, ceea ce face ca multe dintre rezultatele sale să fie incomplete sau parţiale. Îi lipseşte, mai ales, forţa calculului diferenţial (*calculus*) care va fi dezvoltat nu peste multă vreme de o mulţime de matematicieni printre care Isaac Newton (1642–1727) şi Gottfried Leibniz (1646–1716).

Iată cum introduce Galilei ziua a treia din *Discursuri şi demonstraţii matematice în jurul a două noi ştiinţe în legătură cu mecanica şi cu mişcările locale*, publicate în 1638, la cinci ani după faimosul proces:

> Să pornim acum o ştiinţă nouă în jurul unui subiect extrem de vechi. Poate că nu există în natură ceva mai vechi

> decât mişcarea despre care filozofii au scris nu puţine volume şi nu tocmai mici; cu toate acestea, printre proprietăţile ei se află multe care, deşi demne de a fi cunoscute, nu au fost încă observate şi, în nici un caz, demonstrate. Dintre ele, se remarcă unele imediate, ca, de exemplu, aceea că mişcarea naturală a corpurilor grele în cădere se accelerează în mod continuu; dar nu ştim, deocamdată, în ce raport are loc această accelerare: după ştiinţa mea, nimeni nu a demonstrat că un mobil care cade din repaos parcurge, în timpi egali, distanţe care se păstrează în acelaşi raport ca numerele impare succesive *ab unitate*.
>
> S-a observat că obiectele aruncate, mai bine zis proiectilele, descriu o linie curbă de un anume tip; totuşi, nimeni nu a demonstrat că aceasta e o parabolă. Voi demonstra că aşa este, şi încă alte lucruri, deloc puţine şi la fel de vrednice de a fi cunoscute, şi, ceea ce reţin a fi încă şi mai important, se vor deschide astfel porţile unei foarte întinse şi minunate ştiinţe pentru care aceste cercetări ale noastre vor fi doar începutul; alte minţi, mai pătrunzătoare decât a mea, îi vor explora mai târziu cotloanele mai ascunse.

Conştiinţa anvergurii inovatoare a rezultatelor e însoţită de constatarea că instrumentele pe care le are la dispoziţie nu sunt suficient de potrivite şi e nevoie să fie perfecţionate de „alte minţi mai pătrunzătoare".

Printre marile principii ale ştiinţei moderne pe care Galilei le enunţă în cartea sa e şi acela conform căruia un corp greu în cădere liberă

> accelerează continuu [...] şi parcurge, în timpi egali, distanţe care se păstrează în acelaşi raport ca numerele impare succesive *ab unitate*.

Galilei demonstrează experimental că obiectele materiale în cădere liberă în vid (adică fără frecare) cad cu aceeaşi acceleraţie, independent de masă, şi că legea de mişcare descriind

spațiul parcurs în funcție de timp, pornind cu viteză inițială nulă, e dată de faimoasa formulă $x(t) = ct^2$, unde c e o constantă. Să observăm că suma primelor $2n + 1$ numere impare e exact n^2, proprietate cunoscută deja de matematicienii greci; deci, dacă, așa cum observă Galilei, spațiul parcurs în fiecare interval de timp se obține adăugând un număr impar succesiv, legea de mișcare trebuie să depindă de pătratul timpului.

Pe baza acestui principiu, după o lungă serie de observații și propoziții, Galilei formulează următorul rezultat:

> Teorema 22 și Propoziția 36. Dacă din punctul cel mai de jos al unui cerc vertical ducem o coardă care subîntinde un arc nu mai mare decât un cvadrant, și dacă din extremitățile acestei corzi ducem alte două corzi către orice punct de pe arc, timpul de cădere în lungul celor două corzi din urmă va fi mai scurt decât cel de-a lungul celei dintâi și, de asemenea, mai scurt cu aceeași cantitate decât cel de-a lungul corzii mai de jos.

Figura 2.18, extrasă din aceeași carte, ilustrează teorema: timpul de parcurs de-a lungul planelor înclinate *AD* și *DC* e mai scurt decât cel de-a lungul lui *AC* sau decât de-a lungul lui *DC*.

Din această teoremă, cu un raționament conținut într-o *Scolie* care urmează imediat, deduce că „cu cât ne apropiem mai mult de circumferință cu linii poligonale înscrise, cu atât mai repede are loc mișcarea între capetele notate *A* și *C*", și deci „din ceea ce s-a demonstrat se poate deduce că, între două puncte, drumul parcurs în cel mai scurt timp nu e cel mai scurt, adică linia dreaptă, ci arcul de cerc".

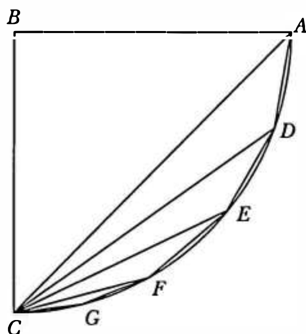


Figura 2.18

Raționamentul lui Galilei se bazează pe o serie de observații experimentale, deducții logice și

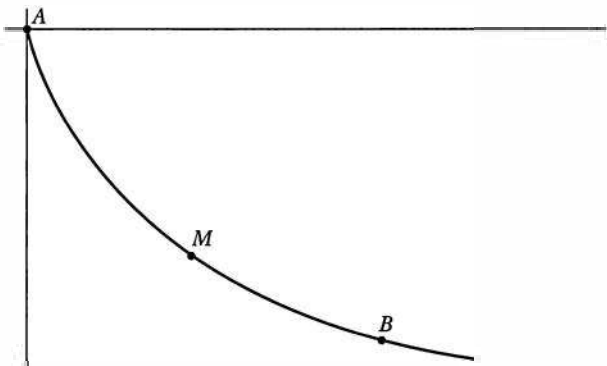


Figura 2.19

elemente de geometrie euclidiană pe care nu le tratăm în această carte. Câţiva ani mai târziu însă, a fost formulată următoarea problemă mai generală:

> Problemă. Date două puncte *A* şi *B* într-un plan vertical, să se determine drumul de-a lungul căruia o particulă mobilă *M* care pleacă din *A* şi cade numai sub influenţa greutăţii sale ajunge în *B* în timpul cel mai scurt (figura 2.19).

Curba cu această proprietate a fost repede numită *brahistocronă*, prin unirea a două cuvinte greceşti: βραχιστος = mai scurt şi χρονος = timp.

Galilei demonstrează că porţiunea de cerc e un drum care se parcurge în timp mai scurt decât dreapta, chiar dacă aceasta din urmă are lungime mai mică. Totuşi, arcul de cerc nu e drumul parcurs în cel mai scurt timp, adică nu e brahistocrona, după cum vor observa mai mulţi învăţaţi în a doua jumătate a secolului XVII.

Problema face parte din clasa de probleme numite *de tip variaţional*; acestea cer să se găsească un minim (sau un maxim) într-o mulţime de configuraţii posibile, faţă de o anume proprietate fixată. În cazul brahistocronei, configuraţiile sunt curbele care unesc *A* cu *B*, iar proprietatea e determinată de timpul de parcurs pe fiecare curbă.

Pentru rezolvarea acestor probleme, matematicienii și-au creat o mulțime de instrumente care azi sunt grupate într-o teorie foarte bogată, numită *calcul variațional*. Printre specialiști, găsim și mari matematicieni italieni, ca Enrico Bompieri (Medalie Fields în 1974), Ennio de Giorgi, Luigi Ambrosio și Alessio Figalli (Medalie Fields în 2018).

CALCULUL, ALTE PROBLEME, ALTE CURBE

La cumpăna secolelor XVII și XVIII, lucrau la Basel frații Jacob și Johann Bernoulli (1654–1705 și 1667–1748), ambii matematicieni, detestându-se pe față. Discutând cu fratele lui problema brahistocronei, Johann înțelese că Jacob se păcălise citindu-l pe Galilei – anume crezând că soluția era chiar arcul de cerc. Ca să-și ridiculizeze fratele, se decise să lanseze în revista *Acta Eruditorum* din 1696 un concurs public pentru rezolvarea problemei.

Cinci matematicieni au ridicat mănușa și au propus soluții exacte: Newton, Leibniz, de L'Hôpital, Jacob și Johann Bernoulli. Deci învingător a fost și Jacob, spre dezamăgirea lui Johann, căruia totuși i-a rămas satisfacția de a fi propus soluția cea mai *elegantă și ingenioasă*, construită într-o serie de pași pe care-i prezentăm în continuare.

Să începem prin a fixa un sistem de referință cartezian cu originea în punctul A și cu axa ordonatelor y orientată în jos.

La primul pas, folosim formula pentru viteza unui corp supus doar forței gravitaționale:

$$v = \sqrt{2gy}$$

unde g e accelerația gravitațională, iar y e a doua coordonată a punctului (de-a lungul axei ordonatelor). Formula aceasta rezultă din principiul căderii libere a corpurilor grele al lui Galilei sau din principiul fizic al *conservării energiei* unui sistem izolat.

Acum Johann Bernoulli *discretizează* problema: împarte planul în benzi orizontale (vezi figura 2.20) și presupune că în

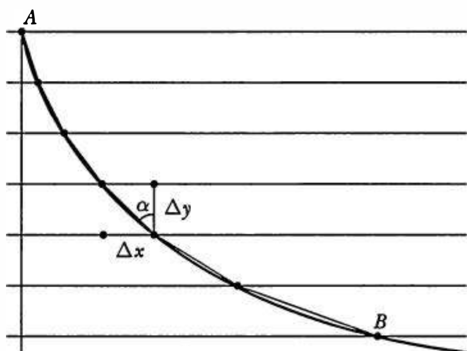


Figura 2.20

fiecare dintre ele particula se mişcă în linie dreaptă; curbele dintr-o asemenea aproximare se numesc *liniare pe porţiuni*; atunci când benzile devin infinit de mici, curbele care aproximează tind către curba căutată.

În acest punct, Johann are o intuiţie de geniu: observă că lumina urmează întotdeauna drumul cel mai scurt, aşa că presupune că drumul căutat trebuie să fie cel al unei raze de lumină. Ideea că lumina se mişcă mai repede decât orice altceva va fi reluată, cum ştim, de Einstein în teoria relativităţii.

Dar o rază de lumină care traversează un spaţiu compus din medii diferite în straturi diferite se supune legii refracţiei optice – legea lui Snell. Astfel, în fiecare bandă, raportul dintre viteză şi sinusul unghiului α, determinat de porţiunea liniară (adică de tangenta la curbă) şi de axa ordonatelor, trebuie să fie constant, deci independent de banda considerată:

$$\frac{v}{\sin(\alpha)} = \text{constant} = K$$

Constanta poate fi găsită în urma unor experienţe optice directe, *rationem experientiae*, cum au făcut, de altfel, Snell şi Descartes, sau printr-o demonstraţie matematică, aşa cum a procedat Fermat, pornind de la faptul că *natura operari per modos*

*et vias faciliores et expeditiores.** În realitate, Fermat a avut nevoie de cinci pagini pentru demonstrația asta care nu i s-a părut dintre cele mai ușoare; câțiva ani mai târziu, Leibniz, folosind întreaga putere a analizei matematice, a demonstrat-o din nou, mândru nevoie mare, *in tribus lineis***.

Ecuația asta traduce *condiția de minimalitate* într-o condiție pur matematică.

Ultimul pas e de natură strict *geometrică* și se bazează pe geometria euclidiană și pe definițiile sinusului și cosinusului. În figura 2.20, fie Δx și Δy creșterile variabilelor x și y de-a lungul curbei în banda aleasă; Δx și Δy sunt catetele unui triunghi dreptunghic cu un unghi egal cu α. Din definiția funcțiilor trigonometrice știm că raportul catetelor unui triunghi dreptunghic e egal cu raportul dintre sinusul și cosinusul unghiului dintre ele. Avem deci identitatea $\Delta y/\Delta x = \cos(\alpha)/\sin(\alpha)$. Cum $\cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$, prin simple manipulări algebrice obținem

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

Punând acum cap la cap cei trei pași precedenți, anume principiul fizic al conservării (invarianței) energiei totale, condiția variațională de minimalitate și condiția geometrică a geometriei euclidiene, obținem

$$K\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} = K\sin(\alpha) = v = \sqrt{2gy}$$

Scoțând de aici raportul $\Delta y/\Delta x$, ajungem la *ecuația diferențială a brahistocronei:*

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

cu c o constantă care depinde de K și de g.

* Natura acționează în modul cel mai simplu și direct. (*N. tr.*)

** În trei rânduri. (*N. tr.*)

O asemenea ecuație e numită diferențială pentru că leagă între ele variabilele x și y și creșterile lor Δx și Δy; ca s-o „rezolvăm“, trebuie să scăpăm cumva de creșterile Δx și Δy și să obținem, după cum spunea Descartes, o ecuație care să lege numai x și y.

Pentru asemenea probleme și pentru altele asemănătoare au creat Johann Bernoulli, Leibniz și Newton calculul diferențial, dând astfel naștere unei puternice revoluții conceptuale care va influența dezvoltarea succesivă a matematicii. Să încercăm să ne facem o idee despre această metodă nouă printr-un exemplu.

Să luăm benzile orizontale din figura 2.20 în care e împărțit planul curbei; dacă ele sunt din ce în ce mai înguste, Δx și Δy devin *elemente infinitezimale*. Să presupunem că ecuația curbei e dată ca un grafic, adică îl putem exprima pe x în funcție de y, $x = x(y)$.

Dacă rescriem ecuația dinainte sub forma

$$\Delta x = \sqrt{\frac{y}{c-y}}\,\Delta y$$

putem spune că Δx *e egală cu aria unui dreptunghi cu baza* Δy *și cu înălțimea*

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

Altfel spus, cele două dreptunghiuri gri din figura 2.21 au aceeași arie.

Privim acum zona notată pe figură $A1$ ca fiind suma multor dreptunghiuri între 0 și x; fiecărui dreptunghi dintre acestea *îi corespunde* în zona $A2$ un dreptunghi de aceeași arie. Așadar, presupunând că Δx și Δy sunt suficient de mici (infinitezimale), ariile $A1$ și $A2$ sunt egale.

De altfel, Bernoulli spune explicit: *ergo & horum integralia aequantur**; e prima apariție, în matematică, a cuvântului *integrală*.

* Prin urmare aceste arii (integrale) sunt egale. (*N. tr.*)

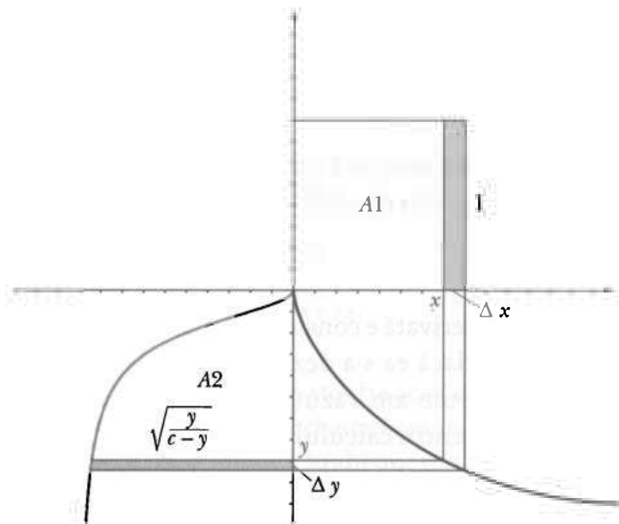


Figura 2.21

Am demonstrat deci că $x(y)$, adică aria zonei $A1$, e egală cu aria de sub graficul funcţiei

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

dintre 0 şi y, *adică* $x(y)$ *e integrala funcţiei*

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

Putem enunţa problema noastră şi folosind un alt concept fundamental din teoria calculului diferenţial, cel de *derivată*. Dacă funcţia $x(y)$ depinde suficient de *continuu* de y, făcându-l pe Δy arbitrar de mic, îl facem şi pe Δx arbitrar de mic. În plus, în anumite condiţii, raportul $\Delta x/\Delta y$ tinde la o valoare precisă pe care o numim *derivata funcţiei* $x(y)$ *în raport cu variabila* y şi pe care o notăm

$$\dot{x}(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Cu această terminologie, ecuaţia brahistocronei se scrie

$$\dot{x}(y) = \sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

care e o *ecuaţie diferenţială* (*cu variabile separate*).

Aşadar, funcţia $x(y)$ *e funcţia a cărei derivată este*

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

Azi, ideea de derivată e considerată mai simplă decât cea de integrală, chiar dacă ea s-a dezvoltat mai târziu – în pofida faptului că, aşa cum am văzut, Fermat introdusese raţionamente similare pentru calculul tangentei la o curbă.

Ca să *integrăm ecuaţia brahistocronei* avem nevoie de câteva cunoştinţe de analiză matematică specifice şcolilor superioare. Facem întâi o substituţie, adică introducem o variabilă ajutătoare t şi presupunem că y depinde de t prin ecuaţia

$$y(t) = c\sin^2(t) = \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\cos(2t)$$

Se vede acum uşor că

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \dot{y}(t) = c\sin(2t)$$

Cum $\Delta x = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \Delta t$,

folosind ecuaţia pentru $\Delta x/\Delta y$ obţinem că $\Delta x = 2c\sin^2(t)\Delta t$.

Această ultimă ecuaţie e uşor de integrat (se calculează de fapt aria de sub graficul funcţiei $2c\sin^2(t)\Delta t$). Se obţine

$$x(t) = \frac{c}{2}(2t) - \frac{c}{2}\sin(2t)$$

(Pentru cine preferă, e uşor de verificat că derivata $\dot{x}(t)$ e chiar $2c\sin^2(t)$.)

Iată deci ecuaţii parametrice pentru curba brahistocronă:

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{c}{2}(2t) - \frac{c}{2}\sin(2t), \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\cos(2t)\right)$$

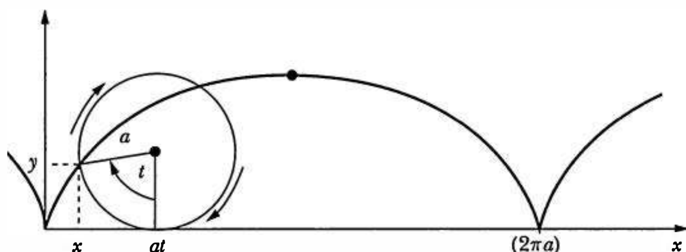


Figura 2.22

Bernoulli a studiat cu mare atenție aceste ecuații și a exclamat: *ex qua concludo curvam brachystochronam esse cycloidem vulgarem*. Și-a dat deci seama că brahistocrona nu e alta decât curba numită *cicloidă*, adică traiectoria descrisă de un punct fixat pe un cerc de rază $a = c/2$ care se rostogolește fără frecare pe o dreaptă. Într-adevăr, observăm în figura 2.22 că, la timpul t, coordonatele punctului P de pe curbă satisfac ecuațiile $x(t) = a(t) - a\sin(t)$ și $y(t) = a - a\cos(t)$.

Vedem deci că Johann Bernoulli face mai mult decât să rezolve problema brahistocronei: el furnizează și un mecanism pentru construcția ei.

Cărțile de istorie sunt pline cu anecdote suculente despre Bernoulli; una anume mi se pare interesantă pentru că surprinde, pe de o parte, pasiunea lui pentru calculul variațional și, pe de altă parte, dificultatea cu care matematicienii și oamenii de știință se fac acceptați de societate.

La începutul carierei, îndemnat și de fratele Jacob, Johann studiază și medicina, spunându-și că ar putea fi un domeniu foarte bun pentru a aplica matematica. Își ia licența, apoi doctoratul în medicină, și scrie o carte cu titlul *De nutritione*. În ea, plecând de la observația că nutriția înlocuiește o anume parte fixă de substanță corporală distribuită uniform, calculează că materialul din care e format corpul nostru se reînnoiește complet într-o perioadă de trei ani. Rezultat care provoacă o aprinsă dezbatere teologică pentru că implică imposibilitatea învierii complete a corpului în întreaga sa substanță!

Faima cucerită îi aduce catedra de matematică de la Universitatea din Groningen, în Olanda, și, în consecință, își pierde interesul pentru medicină.

Cicloida îl interesează și pe Christiaan Huygens (1629–1695), savant olandez genial care studiază sub îndrumarea lui Descartes și anticipează multe rezultate din calculul diferențial. Dar metoda lui e complet diferită de a lui Bernoulli. În cartea *Horologium oscillatorium sive De motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae** (1673), Huygens își pune problema găsirii traiectoriei de-a lungul căreia un pendul se mișcă cu o perioadă independentă de amplitudinea inițială. Căuta deci o curbă *tautocronă* pentru pendulul său, de la cuvintele grecești ταυτος (același) și χρονος (timp).

Și în acest caz ajungem la ecuație traducând în limbaj matematic trei observații.

Prima dintre ele se bazează pe principiul conservării cantității de mișcare descris de Newton; se presupune deci legea a doua a dinamicii, conform căreia forța F care acționează asupra unui corp e egală cu produsul dintre masa m a corpului și accelerație: $F = ma$. Prin definiție, accelerația e derivata a doua a ecuației de mișcare; deci, dacă s e lungimea arcului parcurs pe traiectorie, accelerația e dată de $\ddot{s}$, astfel că $F = m\ddot{s}$.

Proprietatea tautocronei se obține cerând ca accelerația să fie proporțională în fiecare punct cu lungimea arcului: $\ddot{s} + Ks = 0$.

Se vede ușor că cele două triunghiuri din figura 2.23 sunt asemenea, deci laturile corespunzătoare sunt proporționale: de aici obținem $F = -\Delta y/\Delta s$.

Combinând cele trei formule obținute prin observație, obținem ecuația

$$\frac{\Delta y}{\Delta s} = Ks$$

* *Ceasornicul cu pendul sau Demonstrații geometrice privind mișcarea pendulului aplicată la ceasornice.* (N. tr.)

Integrând în raport cu variabila s, găsim

$$y = \frac{K}{2} s^2$$

adică

$$s = \sqrt{\frac{2y}{K}}$$

Inserând această valoare a lui s în egalitatea

$$\frac{\Delta y}{\Delta s} = Ks$$

avem

$$\frac{\Delta y}{\sqrt{y}} = \sqrt{2K}\ \Delta s = \sqrt{2K}\ \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

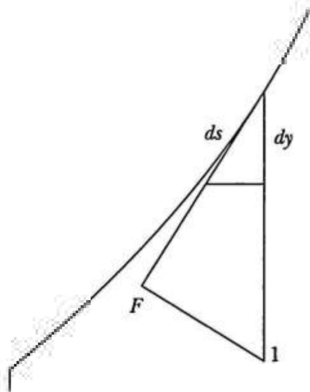


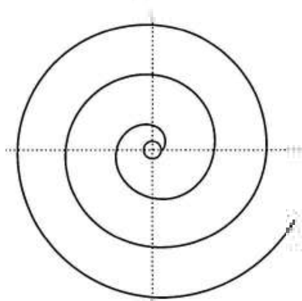
Figura 2.23

şi deci, după un mic calcul algebric, scriem *ecuaţia diferenţială a brahistocronei* sub forma

$$\sqrt{\frac{c-y}{y}}\ \Delta y = \Delta x$$

Până la o translaţie a variabilei y, e exact ecuaţia brahistocronei, deci şi în acest caz soluţia e o cicloidă – lucru observat chiar de Johann Bernoulli: *animo revolvens inexpectatam illam identitatem tautochronae Hugeniae nostra que brachystocronae*. Aşadar curba cicloidă e, în acelaşi timp, brahistocronă şi tautocronă.

Cicloida mai are o proprietate foarte utilă. Plecând de la o curbă plană fără puncte singulare, se poate construi o nouă curbă, numită *evolventa* (*sau involuta*) celei de plecare, în modul următor: înfăşurăm curba cu un fir inextensibil, apoi desfăşurăm firul de pe curbă; evolventa e traiectoria capătului firului în timpul desfăşurării lui complete. Faţă de evolventă, curba de plecare se numeşte *evolută*. De exemplu, evolventa unui cerc e o spirală (figura 2.24).


Figura 2.24

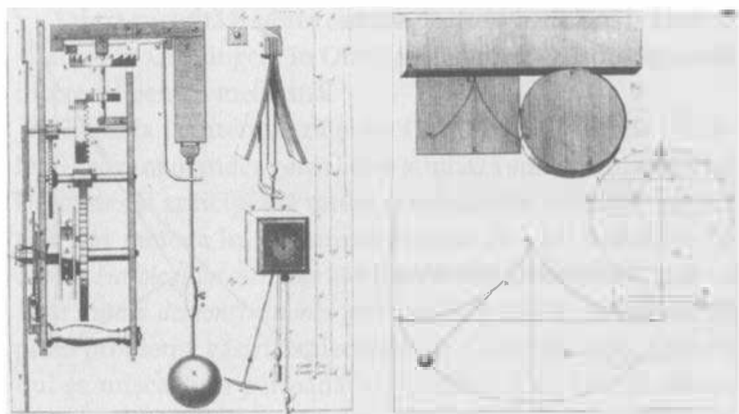


Figura 2.25

Huygens a observat că orice cicloidă e evoluta (sau evolventa) unei alte cicloide. A construit deci un pendul obligând firul la a cărui extremitate era legată bila grea să se mişte de-a lungul unor profile cicloidale, ca în figura 2.25. Ca atare, bila pendulului e forţată să se mişte pe o cicloidă, adică pe o traiectorie tautocronă*.

Noile tehnici de calcul au permis descrierea precisă a multor alte *curbe celebre* care reprezintă soluţiile unor probleme de natură matematică ori provenind din fizică sau inginerie. Printre acestea, *curba exponenţială* care rezolvă o problemă pusă de matematicianul Beaune, elev al lui Descartes, *catenara* (*sau lănţişorul*), curba după care se dispune un fir de masă uniformă supus doar gravitaţiei, *izocrona*, curba de-a lungul căreia o masă supusă numai forţei gravitaţionale coboară liniar cu timpul. În fine, trebuie menţionată *tractricea* (despre care vom vorbi în capitolul 3): e o curbă pe care Leibniz o descrie punând pe masă ceasul lui de buzunar, cu lanţul care-l lega de vestă bine întins: trăgând inelul lanţului în direcţie perpendiculară, ceasul se mişcă pe o

* Frecvenţa unui astfel de pendul nu depinde de amplitudine, lucru important în navigaţie pentru determinarea longitudinii. (*N. tr.*)

curbă numită (tocmai de aceea) tractrice. Altfel spus, e curba plană cu proprietatea că, pe orice tangentă a ei, segmentul dintre punctul de contact și intersecția cu o dreaptă fixă (asimptota) are lungime constantă (figura 2.26).

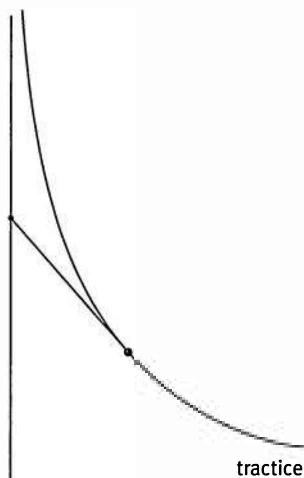


Figura 2.26

CURBURA... ȘI DRUMUL DREPT SE PIERDE*

Să presupunem că sunteți la volanul unei mașini, pe o stradă pe care porțiunile drepte alternează cu cele curbe. Pe porțiunile drepte, nici nu folosiți volanul, dar când strada se curbează trebuie să-l acționați, proporțional cu cât e de largă sau strânsă curba. Măsura rotației volanului ne furnizează *curbura* străzii: când e 0, strada e dreaptă; cu cât acționăm mai mult volanul, cu atât mai mult se depărtează strada de linia dreaptă.

Nu e ușor să dăm o semnificație matematică acestei intuiții: vrem să asociem fiecărui punct al unei curbe un număr care să măsoare cât de mult se „curbează" ea în acel punct. În particular, acest număr ar trebui să fie 0 în toate punctele unei drepte; în cazul unui cerc, în schimb, un număr convenabil ar putea fi inversul razei, deoarece cu cât e raza mai mică, cu atât mai curbat e drumul.

Vom considera cazul simplu al curbelor plane fără puncte singulare. Am văzut înainte cum putem defini dreapta tangentă, cea care aproximează cel mai bine curba într-o vecinătate a punctului și oferă informații despre *direcția* curbei.

* Citat din Dante, *Infernul*: Nel mezzo del cammin di nostra vita mi ritrovai per una selva oscura che la diritta via era smarrita. (*N. tr.*)

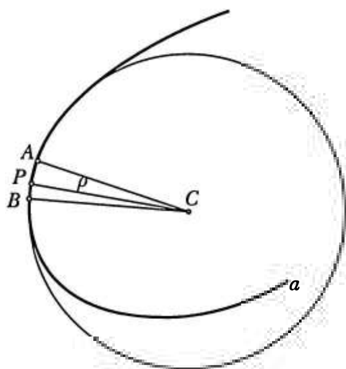


Figura 2.27

Ca să studieze felul în care curba se depărtează de tangenta sa, Newton a introdus *cercul osculator*, adică cercul care aproximează cel mai bine curba într-un punct al ei *P*. Iată cum se construiește cercul osculator: se iau pe curbă două puncte, *A* și *B*, apropiate de *P* și se consideră cercul determinat de *A*, *B* și *P*; cercul osculator e cercul limită obținut atunci când *A* și *B* se apropie de *P* (figura 2.27).

Centrul cercului osculator *C* se numește *centru de curbură*. Inversa razei sale e *curbura curbei în punctul P*.

Cu această definiție, curbura unei drepte e 0, în timp ce curbura cercului de rază r e $1/r$ în fiecare punct, așa cum ne doream.

Pentru o curbă dată ca grafic $(x,y(x))$, Newton găsește o expresie elegantă pentru curbura într-un punct, în funcție de primele două derivate:

$$k(x,y) = \frac{\left[1+(\dot{y}(x))^2\right]^{3/2}}{\ddot{y}(x)}$$

Ne putem imagina și curbe care ies din plan și „locuiesc" de-a dreptul în spațiul tridimensional. Acestea sunt numite uneori curbe „strâmbe" – în italiană: *sghembe* sau *gobbe* (cocoșate). Curbele de acest tip au fost studiate încă din Antichitate, adesea apărând ca intersecții de suprafețe sau ca spirale în spațiu. Dar studiul lor sistematic începe abia în secolul XVIII, după ce se impun ideile inovatoare ale lui Descartes și Fermat, care permit reprezentarea unei curbe strâmbe într-un sistem de coordonate spațial în care fiecare punct din spațiu e asociat unui triplet (x,y,z). Astfel, curba se poate descrie prin ecuații parametrice, punctele ei fiind date de funcții $(x(t),y(t),z(t))$ care

depind de parametrul t. Desigur, cele trei funcţii trebuie să satisfacă anumite condiţii de regularitate, de exemplu să fie polinomiale sau măcar derivabile.

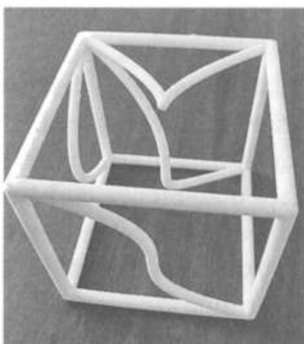


Figura 2.28

Un exemplu interesant e curba de ecuaţii parametrice $(\sin(t),\cos(t),t)$ care reprezintă o elice cilindrică. Un altul e curba strâmbă de ecuaţii (t,t^2,t^3); figura 2.28 reprezintă un model al ei creat de Oliver Labs cu o imprimantă 3D. Cubica e inserată într-un cub pe ale cărui feţe găsim trei curbe diferite obţinute proiectând cubice pe feţele respective (din punct de vedere matematic, asta înseamnă că renunţăm la una dintre coordonate). Se obţin: parabola (t,t^2) pe faţa din stânga, cubica plană netedă (t,t^3) (pe faţa de sus) şi cubica plană cuspidală (t^2,t^3) (pe faţa frontală).

Prin orice punct P al unei curbe strâmbe se poate defini *planul osculator* ca poziţie limită a planului care trece prin P şi prin alte două puncte generice P' şi P'' ale curbei, atunci când acestea din urmă tind la P de-a lungul curbei. Pentru o curbă plană, planul osculator coincide în fiecare punct cu planul curbei.

Pe modelul cercului osculator al unei curbe plane putem defini şi un *cerc osculator* pentru curbe spaţiale, impunându-i să rămână în planul osculator. Inversa razei sale se numeşte (*prima*) *curbură* a curbei în P. Dar cantitatea aceasta nu e suficientă pentru a înţelege cum şi cât se curbează curba în spaţiu. Măsura variaţiei planului osculator în vecinătatea lui P se numeşte *torsiune* (ori *a doua curbură*) a curbei în P. Curbura şi torsiunea determină complet comportarea curbei spaţiale.

Conceptul de curbură se extinde apoi la suprafeţe şi, mai departe, la varietăţi de dimensiune superioară, după cum vom vedea, devenind unul dintre conceptele cele mai profunde şi fecunde din geometria modernă.

Odată ce adoptăm definiția lui Descartes pentru curbele algebrice, anume locul punctelor din plan ale căror coordonate (x,y) satisfac o ecuație de tipul $f(x,y) = 0$, apare firesc întrebarea dacă o asemenea curbă are întotdeauna puncte, altfel spus: dată o funcție $f(x,y)$, există întotdeauna perechi de numere (x,y) care-o anulează? Iar dacă există, avem vreun mod de a le determina sau vreun algoritm pentru a le calcula?

Curba dată de ecuația $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$, de exemplu, nu are soluții în numere reale: într-adevăr, pătratul unui număr real e întotdeauna pozitiv, astfel că $f(x,y)$ e întotdeauna mai mare sau egală cu 1.

Numerele reale sunt o mulțime care conține, pe lângă numerele naturale $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, pe cele întregi $\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \ldots\}$, numerele raționale, adică fracțiile p/q cu p și q întregi, și multe alte numere, zise iraționale, ca de exemplu rădăcinile de anumite ordine ale unor numere întregi ($\sqrt{2}$, ...), și numere zise transcendente (π, e,...). Toate numerele acestea au fost bine definite și axiomatizate abia pe la începutul secolului XX.

Matematicienii au creat apoi o mulțime de numere și mai bogată, *numerele complexe*, care conține numerele reale și numerele imaginare, determinate ca rădăcini pătrate de numere negative, de exemplu $\sqrt{-1} := i$. În această mulțime, orice curbă algebrică are puncte. Azi studiem curbele folosind numerele complexe și abia apoi clasificăm punctele în reale și pur „imaginare".

În acest context, problema cea mai grea (dar și cea mai bogată în aplicații) e determinarea punctelor unei curbe algebrice cu coordonatele perechi de numere raționale, sau pur și simplu întregi, și cum anume să le găsim.

Dacă curba e de gradul 1, adică e o dreaptă, soluția e foarte simplă: e de ajuns să atribuim uneia dintre variabile o valoare rațională și să scoatem valoarea celeilalte rezolvând ecuația, apoi să vedem dacă și aceasta din urmă e rațională. De exemplu, dacă

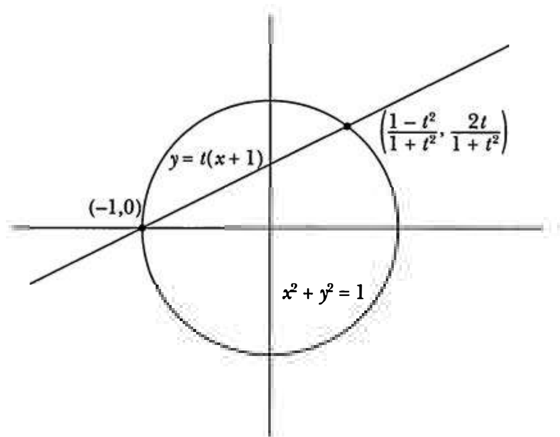


Figura 2.29

dreapta e dată de ecuația $3x - y + 2 = 0$, atribuind lui x valoarea p/q obținem pentru y valoarea $3(p/q) + 2$ care e rațională.

Problema e deja mult mai dificilă pentru o curbă de gradul 2; să luăm, de exemplu, cercul $x^2 + y^2 = 1$. În acest caz, dacă dăm o valoare rațională uneia dintre cele două variabile, pentru a găsi valoarea celei de-a doua trebuie să extragem o rădăcină pătrată, astfel că, foarte probabil, nu vom obține o valoare rațională.

Problema găsirii punctelor raționale pe cerc a fost rezolvată în secolul III d.Cr. de Diofant din Alexandria. Metoda lui se numește azi *a corzilor*. Pornim cu o soluție rațională, să zicem $x = -1$ și $y = 0$, și construim toate dreptele care trec prin acest punct, ca în figura 2.29. Dreptele acestea sunt descrise de ecuația $y = t(x + 1)$. Pentru fiecare t, dreapta corespunzătoare taie cercul în alt punct ale cărui coordonate se determină cu ușurință:

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Când t variază, parcurgem astfel întregul cerc, deci acestea sunt ecuații parametrice ale cercului – foarte simple, rapoarte de polinoame. Funcțiile care sunt rapoarte de polinoame cu coeficienți raționali se numesc *raționale* și au proprietatea,

importantă pentru scopul nostru, că iau valori raționale pentru orice valoare rațională a variabilei t.

Așadar, dând valori raționale variabilei t în cele două ecuații precedente, anume $t=p/q$ cu p și q numere întregi, găsim că perechile de numere raționale care satisfac ecuația $x^2+y^2=1$ sunt

$$(x,y)=\left(\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2},\frac{2pq}{q^2+p^2}\right)$$

cu p și q luând toate valorile întregi.

Diofant observă că din perechile acestea putem obține toate tripletele de numere întregi (a,b,c) cu proprietatea că $a^2+b^2=c^2$, așa-numitele *triplete pitagoreice*. Tot ce avem de făcut e să eliminăm numitorul comun, q^2+p^2 pe care să-l redenumim c, apoi (eventual) să înmulțim totul cu un întreg r. Obținem astfel toate tripletele pitagoreice:

$$(a,b,c)=(r(q^2-p^2),\ r^2pq,\ r(q^2+p^2))$$

unde r,p și q sunt numere întregi. De exemplu, cu $r=1, p=1$ și $q=2$ avem tripletul pitagoreic $(3,4,5)$.

O ecuație polinomială în două (sau mai multe) variabile cu coeficienți numere întregi (sau raționali) se numește *ecuație diofantică*. Găsirea unor perechi de numere raționale care satisfac ecuații diofantice de grad superior lui doi e o problemă dificilă, studiată cu tehnici care azi au devenit foarte sofisticate și care țin de algebră, de geometrie și de analiză.

Sigur că problema ar avea imediat soluție dacă s-ar putea găsi o parametrizare rațională – din păcate, în general asemenea parametrizări nu există.

De curbele algebrice plane s-a ocupat și Newton; în particular, urmând calea deschisă de Descartes, a clasificat complet curbele de gradul al treilea, *cubicele*. Pasul crucial în clasificarea lui Newton constă în observația că orice cubică fără nici un punct singular are cel puțin un *punct de inflexiune*, adică un punct nesingular în care tangenta „atinge“ curba cu multiplicitate mai mare decât doi. Pornind de la această observație, Newton demonstrează că pentru orice cubică nesingulară

există un sistem de referință convenabil în care ecuația care-o definește capătă forma $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Cubicele singulare admit parametrizări raționale, după cum am văzut, de exemplu, în cazul *Folium*-ului lui Descartes.

În schimb, curbele nesingulare (netede) nu au în general parametrizări raționale; mai mult, acest lucru e adevărat pentru orice curbă algebrică plană nesingulară de grad mai mare decât doi. Merită observat că, în matematică, a demonstra imposibilitatea a ceva – în cazul nostru, imposibilitatea parametrizării cu funcții raționale – e adesea mai dificil decât a demonstra că ceva e posibil.

Problema parametrizării cubicelor netede cu funcții cât mai simple a fost atacată de mari matematicieni printre care Niels Henrik Abel (1802–1829), Carl Gustav Jacobi (1804–1851), Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Leonhard Euler (1707–1783). Prin analogie cu funcțiile trigonometrice sinus și cosinus care parametrizează cercul, aceștia au introdus niște funcții speciale, numite *funcții eliptice*, care parametrizează în mod natural cubicele netede.

Funcțiile eliptice nu sunt algebrice, nici raționale, deci nu se pot exprima nici ca polinoame, nici sub formă de rapoarte de polinoame, iar descrierea lor e mai degrabă complexă – în adevăratul sens al cuvântului, adică pentru a le înțelege cât de cât trebuie să trecem la numerele complexe despre care am vorbit mai sus. Se pot demonstra multe proprietăți ale lor, asemănătoare funcțiilor trigonometrice. De exemplu, proprietăți de adunare: date valorile unei funcții eliptice în două puncte, se poate calcula valoarea într-un al treilea punct printr-un procedeu matematic numit adunare.

Cu ajutorul funcțiilor eliptice se pun în evidență multe proprietăți geometrice și algebrice sau aritmetice ale cubicelor plane care, din acest motiv, se mai numesc și *curbe eliptice*.

O teoremă importantă, lansată ca o conjectură de Henri Poincaré (1901) și demonstrată ulterior de Louis Mordell (1922), afirmă că metoda corzilor a lui Diofant poate fi aplicată cu

succes şi în cazul cubicelor. Orice punct cu coordonate raționale al unei cubice netede se poate obține plecând de la o mulțime finită de puncte raționale şi intersectând cubica cu corzi duse prin două dintre ele sau tangente la unul dintre ele. Din păcate, nu există un algoritm care să determine punctele inițiale pentru orice cubică.

Diofant însuşi, în cartea sa *Arithmetica*, foloseşte nu numai corzi, ci şi tangente ca să găsească puncte raționale pe cubică. Ca să-i înțelegem abilitatea tehnică surprinzătoare pentru epoca aceea, să ne uităm la o problemă şi la soluția ei, din capitolul 6 al cărții.

> Problema 18. Să se determine un triunghi dreptunghic a cărui arie adăugată ipotenuzei să fie un (număr rațional ridicat la) cub şi al cărui perimetru să fie un (număr rațional ridicat la) pătrat.

Să interpretăm problema în limbaj modern: alegem unitatea de măsură în aşa fel încât o catetă a triunghiului să aibă lungimea 2. Notând cu b şi c a doua catetă şi ipotenuza, problema se traduce uşor în cererea de a găsi b şi c astfel încât $b+c=\beta^3$ iar $2+b+c=y^2$. Înlocuind $b+c=\beta^3$ în a doua ecuație obținem $\beta^3+2=y^2$. Notăm $x=\beta+1$ şi avem deci de găsit punctele raționale ale cubicei $x^3-3x^2+3x+1=y^2$.

Diofant sugerează să punem $(3/2)x+1$ în loc de y; substituția asta furnizează ecuația x^3-$(21/4)x^2$ care are soluțiile $x=0$ şi $x=21/4$. Aceasta din urmă ne dă, urmând calea inversă, soluția

$$b=\frac{24121185}{628864} \quad \text{şi} \quad c=\frac{24153953}{628864}$$

Diofant nu ne spune cum a ajuns la substituția asta. Azi ne-am putea gândi că a luat punctul rațional (0,1) pe curbă, a calculat tangenta la curbă în acel punct descoperind că e tocmai dreapta $y=(3/2)x+1$ (figura 2.30)!

Cititorul poate verifica uşor că dreapta respectivă e într-adevăr tangenta în (0,1) ; sugerez să translateze punctul în (0,0), apoi să modifice corespunzător ecuația curbei.

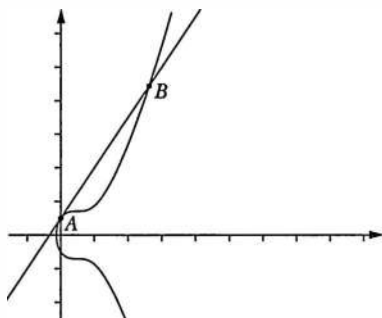


Figura 2.30

Pierre de Fermat a fost un cititor pasionat al *Aritmeticii* lui Diofant. A scris numeroase observații pe marginile unei ediții din 1621, adunate într-o carte publicată postum – a fost soarta cam tuturor operelor sale. Într-una dintre ele a notat:

> Pe de altă parte, e imposibil ca un cub să se poată scrie ca sumă de două cuburi, sau ca o putere a patra să fie suma a două puteri a patra, sau, în general, ca orice număr care e o putere mai mare decât doi să se poată scrie ca o sumă de două puteri analoage. Am găsit o demonstrație cu adevărat splendidă a acestei propoziții, dar marginea acestei cărți e prea mică s-o conțină.

Fermat afirmă aici că nu există trei întregi nenuli a, b, c, cu n întreg, mai mare ca 2, astfel ca $a^n + b^n = c^n$. Altfel spus, că ecuația diofantică $x^n + y^n = 1$ nu admite soluții raționale pentru $n \geq 3$.

Aceasta e una dintre cele mai celebre probleme matematice – s-au luptat cu ea cei mai importanți matematicieni din ultimii 350 de ani. I se spune *Marea teoremă* (sau *conjectură*) *a lui Fermat*.

În 1986, matematicianul german Gerhard Frey a observat că dacă cubica netedă $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ are o anume proprietate, atunci teorema propusă de Fermat e adevărată.

În 1993, englezul Andrew Wiles a anunțat public, în timpul unei expuneri ținute la Newton Institute din Cambridge,

că a demonstrat celebra (pentru matematicieni) conjectură a japonezilor Taniyama-Shimura, anume că orice curbă eliptică (semistabilă) are proprietatea respectivă și deci Teorema lui Fermat e adevărată.

A fost un moment de mare entuziasm pentru matematicienii din întreaga lume, o conjectură rămasă deschisă de secole fusese în sfârșit demonstrată! Îmi amintesc încă ce frenezie era la institutul Max-Planck din Bonn, unde lucram pe-atunci; vestea ajunsese prin e-mail, dimineața devreme, trimisă de americanul Serge Lang. Germanul Gerd Faltings, profesor și codirector al institutului din Bonn, demonstrase înainte, folosind tehnicile lui Mordell pentru cubice, că eventualele contraexemple la Teorema lui Fermat sunt cel mult în număr finit, rezultat pentru care primise Medalia Fields în 1986. Faltings s-a hotărât imediat să țină o serie de expuneri publice ca să studieze rezultatul lui Wiles, dar la a doua întâlnire a anulat expunerea: demonstrația conținea o eroare importantă!

Folosindu-și toate abilitățile de matematician și cu ajutorul studentului său Richard Taylor, Wiles a reușit într-un an să pună la punct demonstrația care, după ce a fost verificată de mai mulți experți, a fost publicată în 1995, în două articole din revista *Annals of Mathematics*.

Andrew Wiles a dedicat șapte ani din viață soluției conjecturii lui Fermat. Aventura asta matematică a fost povestită de Simon Singh: întâi într-o foarte frumoasă carte, *Ultima teoremă a lui Fermat**, apoi într-un film documentar omonim al PBS-NOVA.

Cum regulamentul Medaliei Fields nu permite acordarea ei unor matematicieni de peste 40 de ani, Wiles, care avea 41 de ani când a reușit demonstrația, nu a putut primi acest premiu.

Căutarea soluțiilor raționale sau întregi ale ecuațiilor diofantice e o temă de mare interes în numeroase domenii ale matematicii și în multe aplicații ale sale; în particular, în domeniul

---

* Apărută în traducere românească sub titlul *Marea Teoremă a lui Fermat* (Ed. Humanitas, București, 2012). (*N. red.*)

comunicațiilor digitale, pentru a transmite public mesaje al căror conținut trebuie să rămână secret. E motivul pentru care teoria cubicelor plane e studiată intens de experții în criptografie.

CUM CONSTRUIESC CURBELE CEI NĂSCUȚI ÎN ERA DIGITALĂ

Unii cercetători ai evoluției gândirii și cunoașterii umane atrag atenția că un punct critic al acestei evoluții, o singularitate a curbei cunoașterii, e dat de trecerea de la *epos* la *logos*, adică de tranziția de la o tradiție orală la una scrisă. Trecerea aceasta începe odată cu Homer (secolul VII î.Cr.) și atinge completa maturitate în perioada elenistică. O contribuție importantă o au scrierile lui Euclid, Arhimede, Apolloniu, în care intuiția geometrică și calculul algebric sunt codificate în scris. În acest capitol am văzut cum a formulat în scris Euclid conceptul de curbă și cunoștințele care derivă din el; apoi am văzut cum l-a completat Descartes folosind algebra, apoi cum l-au îmbogățit alții folosind analiza.

Cred că în zilele noastre traversăm o perioadă de tranziție asemănătoare, de la o tradiție scrisă și orală la o tradiție digitală, de la *epos* și *logos* la *digital*. Avem la dispoziție instrumente noi, conceptuale și tehnologice, capabile să reflecte și să interpreteze exigențele simplificatoare ale minții noastre (Enriques), să creeze conexiuni între lumea ideilor și realitatea concretă, într-o manieră simplă și directă. Instrumente care se bazează pe computere, pe tehnologia informației, pe roboți și imprimante, iar acum și pe laboratoare digitale (*fabrication laboratory* sau *fab lab*). Toate acestea – în ultimă analiză, fruct al aplicațiilor matematicii – sunt foarte potrivite pentru a da viață (în manieră digitală) unor noi idei matematice.

Există azi multe software-uri care ne permit să vizualizăm ușor pe computer, apoi să imprimăm dacă vrem, orice curbă algebrică. Ca să desenez curbele din acest capitol am folosit programul GeoGebra care se poate descărca gratuit de pe pagina



Figura 2.31

https://www.geogebra.org/ (conține și instrucțiuni și multe exemple). Ușurința cu care poate fi folosit e cu adevărat surprinzătoare; azi, în multe gimnazii, elevii învață să deseneze curbe cu computerul, învață să modifice după cum le place ecuația ca să obțină curbe mai potrivite scopului fixat. Mi-aș da snowboard-ul meu cel nou (cu un profil curving care permite răsuciri foarte strânse pe platourile înzăpezite) ca să-l văd pe Descartes jucându-se cu acest „compas" modern care dialoghează perfect cu limba geometriei analitice create de el!

Dar într-un *fab lab* putem face mai mult: cu un cutter laser (figura 2.31) capabil să „citească" ecuațiile curbelor pe care le-am construit cu software-ul, suntem în stare să creăm profiluri din nenumărate materiale, de exemplu lemn, plastic și chiar marmură. Putem deci să realizăm ușor în mod concret multe idei pe care să le folosim, de exemplu, în design și tehnologie.

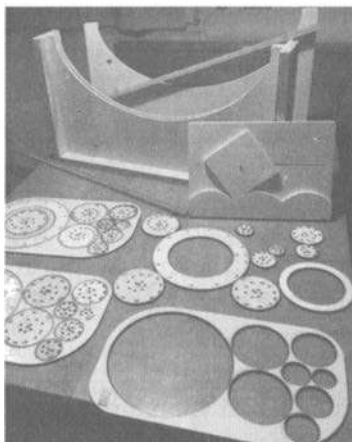
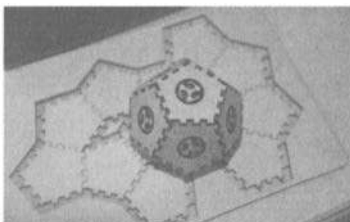




Figura 2.32

Într-un *fab lab*, curbele încep să facă parte din ce în ce mai mult din educaţia şi din instrumentele tehnologice care însoţesc modul nostru de acţiune.

Figura 2.32 prezintă câteva imagini de obiecte create cu cutterul laser la MUSE, Muzeul de Ştiinţe din Trento.

3. Suprafețe

Definiția care urmează, preluată din *Enciclopedia Treccani*, surprinde bine sensul comun al suprafeței:

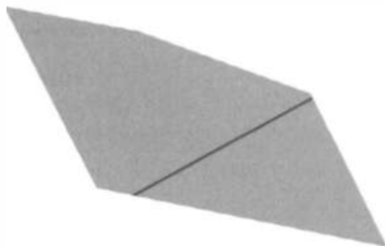
> învelișul unui corp, sau elementul care separă regiunea din spațiu ocupată de corp, de aceea neocupată de corp. Sau, dacă ne referim la anumite corpuri, fața externă. De exemplu, suprafața unui fruct, sau a corpului uman; în alt sens, suprafața internă a unui vas. O suprafață poate fi gândită ca fiind mai mult sau mai puțin plană și având două dimensiuni.
>
> În matematică, definiția se formează prin abstractizarea noțiunii intuitive de înveliș al unui corp, având caracteristicile unei folii considerate lipsită de grosime. Sau, dacă ne referim la modul prin care se obține: se definește, de exemplu, suprafața de rotație (sau de revoluție, sau rotundă) ca suprafața generată de o curbă care se rotește în jurul unei drepte (axa).

A avea două dimensiuni și a fi „mai mult sau mai puțin plană“ sunt caracteristici dificil de definit în matematică și, după cum vom vedea, necesită o doză substanțială de abstractizare.

Să plecăm iarăși de la *Elemente* și să vedem ce propune Euclid în Cartea I.

> Definiția 5. O suprafață e ceea ce are lungime și lărgime.

Definiția e destul de criptică și vrea probabil să spună că suprafața are două dimensiuni, dar fără să specifice ce trebuie înțeles prin lungime și prin lărgime.


Figura 3.1

Continuă apoi cu definițiile unor suprafețe particulare, cum sunt planul, conul, cilindrul și sfera.

Pentru plan, Euclid folosește o definiție foarte asemănătoare Definiției 4 a dreptei:

> Definiția 7. O suprafață plană e aceea care stă la fel față de dreptele pe care le conține (figura 3.1).

O interpretare posibilă ar fi că, date două puncte pe un plan, dreapta care le unește trebuie să fie conținută în întregime în plan; dar poate că nu asta era ideea: într-adevăr, într-o propoziție ulterioară, Euclid demonstrează că, fiind date două drepte paralele și două puncte pe ele, dreapta care le unește stă pe planul definit de cele două drepte!

Trebuie observat și că, spre deosebire de felul cum a procedat cu dreapta și cu cercul, Euclid nu postulează existența planului.

În schimb, pentru definiția conului, a cilindrului și a sferei, Euclid alege conceptul de suprafață de rotație – obținută prin rotația unei curbe plane (zisă *generatoare*) în jurul unei drepte (zisă *axă de rotație*). Iată definiția sferei:

> Cartea a IX-a, Definiția 14. Când un semicerc de diametru fixat e rotit până ajunge din nou în poziția inițială, figura care se obține e o sferă.

Spre deosebire de cerc, pentru care Euclid dezvoltă o teorie consistentă (în Cartea a V-a), despre sferă vorbește foarte puțin. Nici măcar nu demonstrează că punctele sferei sunt echidistante față de centrul sferei; sigur că demonstrația e evidentă, pentru că fiecare punct stă pe un semicerc egal cu cel de plecare, fiind deci echidistant față de centrul acestuia.



Figura 3.2

Cu excepția lui Arhimede (despre care vom vorbi puțin mai încolo), matematica greacă nu aprofundează prea mult conceptul de suprafață, preferă de departe geometria plană și nu construiește o teorie organică a obiectelor spațiale.

O suprafață se numește *riglată* dacă e acoperită de drepte – echivalent, dacă prin fiecare punct al său trece o dreaptă conținută pe de-a-ntregul în suprafață. Exemple de suprafețe riglate sunt conurile, adică suprafețele generate de dreptele care unesc o curbă plană cu un punct exterior planului (zis *vârf al conului*); de asemenea, cilindrii, care sunt generați de drepte care trec printr-un punct al unei curbe plane și sunt perpendiculare pe planul curbei. Figura 3.2 reprezintă un hiperboloid cu o pânză (zis și hiperbolic), cu un con în interior: e o suprafață dublu riglată pentru că prin fiecare punct al său trec două drepte distincte conținute în întregime pe suprafață.

Un alt tip de suprafață riglată e cea generată de toate tangentele la o curbă spațială. Suprafețele riglate de acest tip se mai numesc *desfășurabile* pentru că, dacă le gândim ca pe niște bucăți de stofă flexibilă și inextensibilă, pot fi întinse, cel puțin local, pe o suprafață plană.

Un alt exemplu de suprafață riglată e elicoidul, generat de mișcarea elicoidală a unei drepte de-a lungul unei axe. Atunci când dreapta e perpendiculară pe axă, vorbim despre un elicoid drept. Scara „în spirală“ e un asemenea exemplu, altul e celebrul *burghiu hidraulic al lui Arhimede*, un dispozitiv mecanic folosit pentru a ridica un lichid sau un material granular, care e încă folosit pentru extragerea apei.

Perfecţiunea cercului şi, mai ales, a sferei îl fascinează pe marele matematician grec Arhimede (287–212 î.Cr.). Figură emblematică de om de ştiinţă şi inventator, Arhimede trăieşte şi lucrează la Siracuza, în cultura Magna Greciei, având o abordare foarte autonomă şi originală, dar păstrând mereu un contact foarte strâns, prin corespondenţă, cu învăţaţii din Alexandria. În geometrie, în mod special, Arhimede a demonstrat rezultate şi teoreme surprinzătoare.

Metoda sa de cercetare e foarte inovativă şi, în anumite privinţe, diferită de a lui Euclid şi a altor geometri greci. Am redat în primul capitol cuvintele cu care descria chiar el modul în care ajungea la descoperiri matematice în două etape oarecum distincte.

În prima etapă, cu o metodă pe care el o numea mecanică, bazată pe principii de echivalenţă a măsurilor (greutăţi, lungimi, arii) verificabile concret, ajutându-se eventual de instrumente mecanice (pârghii şi suprapuneri), ajunge la formularea unor teoreme. Un mod foarte practic de a face matematică, asemănător celui folosit azi în ingineria matematică.

Nu atribuie acestei prime metode o rigoare suficientă pentru a determina o dovadă matematică a rezultatului, aşa că furnizează, în etapa a doua, o demonstraţie concluzivă pe care o numeşte geometrică, folosind metoda logico-deductivă a lui Euclid. Mai precis, se referă la metoda exhaustiei a lui Eudoxos, metodă care constă în aproximarea figurii care constituie obiectul analizei, din interior şi din exterior, cu poligoane sau cu poliedre.

Nefiind mulţumit de versiunea teoriilor lui Euclid conţinute în Cartea a V-a a *Elementelor*, Arhimede îi face o prezentare mai aprofundată şi introduce o nouă axiomă (pe care azi o numim *axioma lui Arhimede*). Să zăbovim un pic asupra teoriei exhaustiei ca să înţelegem în ce constă partea ei delicată şi de ce a fost nevoie de adăugarea noii axiome.

Teoria proporţiilor îşi propune să considere lungimile curbelor (sau ariile suprafeţelor, volumele corpurilor) ca numere.

Grecii nu aveau la dispoziție decât numerele raționale – chiar dacă, așa cum am văzut, erau perfect conștienți de existența lungimilor iraționale: din teorema lui Pitagora, de exemplu, reiese că lungimea diagonalei pătratului de latură 1 e rădăcina pătrată a lui 2, un număr irațional sau, cum se spunea pe-atunci, incomensurabil.

Cum trebuie deci interpretate asemenea lungimi? Cum să le comparăm? În prima carte a tratatului său *Despre sferă*, Arhimede enunță următorul postulat:

> Postulat. Că în plus între linii inegale, suprafețe inegale și corpuri inegale cel mai mare îl depășește pe cel mai mic cu o cantitate care, dacă e adăugată sieși, poate depăși orice mărime fixată de tipul celor comparate între ele.

Azi încă spunem că într-o mulțime de numere, înzestrată cu o adunare și o înmulțire (un *corp*) și cu o ordine, e satisfăcută *axioma lui Arhimede* dacă pentru orice două numere pozitive a și b există un întreg pozitiv n astfel ca $na>b$. Numerele reale formează un corp ordonat care rezultă că e arhimedian; la fel, numerele raționale. În plus, numerele reale formează un *corp complet*, ceea ce e mai mult decât arhimedian, motiv pentru care fiecărei lungimi a unui segment îi putem asocia un număr real; se poate deci vorbi despre *dreapta reală*.

Din proprietatea lui Arhimede rezultă, fără mare dificultate, că lungimile raționale (numerele raționale) sunt dense în totalitatea lungimilor (numerele reale), altfel spus, pentru orice pereche de lungimi $x<y$ există o lungime rațională a intermediară: $x<a<y$.

Astfel, axioma aceasta i-a permis lui Arhimede să afirme *fără ambiguitate* că orice lungime e determinată în mod univoc de lungimile raționale mai mici și mai mari decât ea. Vom spune deci că două lungimi sunt egale, $l_1 = l_2$, dacă orice lungime rațională mai mică decât l_1 e mai mică și decât l_2 și reciproc.

Metoda exhaustiei se bazează pe teoria proporțiilor și constă în calculul unei mărimi Σ comprimând-o între o limită inferioară,

I_n nedescrescătoare, și o limită superioară, C_n necrescătoare, în așa fel încât, pentru niște numere n convenabil alese, diferența (sau raportul) $C_n - I_n$ ($C_n : I_n$) să poată fi făcută mai mică decât orice mărime dată (mai mic decât raportul oricăror două mărimi date).

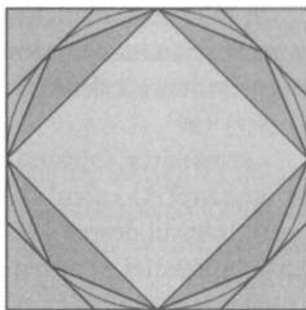


Figura 3.3

De exemplu, cu metoda exhaustiei se poate demonstra că aria unui cerc de rază r, $A(r)$, e proporțională cu pătratul razei: $A(r) = \text{constantă} \times r^2$. Figura 3.3 ne arată cum trebuie să procedăm, aproximând circumferința cu poligoane regulate înscrise și circumscrise.

Fie $P_1(r) \subset P_2(r) \subset P_3(r) \subset \ldots$ șirul de poligoane interioare și $Q_1(r) \supset Q_2(r) \supset Q_3(r) \supset \ldots$ șirul poligoanelor exterioare; fiecare poligon are de două ori mai multe vârfuri decât cel dinainte, vârfurile noi fiind obținute împărțind în două părți egale fiecare unghi la centru dintre vârfurile adiacente din poligonul anterior.

Dacă i e destul de mare, diferența dintre ariile poligoanelor exterioare și interioare, $Q_i(r) - P_i(r)$, poate fi făcută oricât de mică; așadar, pentru i mare, $P_i(r)$ aproximează oricât de bine aria cercului $A(r)$.

Aria unui poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc de rază r e proporțională cu pătratul razei, r^2, constanta de proporționalitate depinzând numai de n; într-adevăr, poligonul e format din n triunghiuri isoscele cu laturile egale de lungime r.

Dacă luăm două cercuri de raze r și r' și notăm cu $P_i(r)$, respectiv $P_i(r')$ șirurile de poligoane interioare unuia și celuilalt, vom avea relația $P_i(r):P_i(r') = r^2:r'^2$.

Să presupunem acum, prin absurd, că $A(r):A(r') < r^2:r'^2$. Rezultă că, dacă i e suficient de mare, vom avea și $P_i(r):P_i(r') < r^2:r'^2$, dar relația aceasta contrazice afirmația dinainte. Exact la fel se arată că și inegalitatea $A(r):A(r') > r^2:r'^2$ conduce la contradicție.

Trebuie deci să fie adevărată egalitatea

$A(r):A(r') = r^2:r'^2$

În 1706, matematicianul William Jones a propus simbolul π pentru notarea constantei de proporţionalitate şi a scris, pentru prima oară, celebra formulă

$$A(r) = \pi r^2$$

Asemănător, folosind aceleaşi poligoane, se poate arăta că lungimea $S(r)$ a cercului de rază r e dată de formula $S(r) = 2\pi r$.

În tratatul despre *Măsura cercului*, Arhimede foloseşte metoda exhaustiei pentru a determina, cu o bună aproximaţie, constanta π, gândită ca aria cercului de rază unitară. Problema aceasta e numită de obicei *cuadratura cercului* – în uzul comun s-a încetăţenit ca o sintagmă care denumeşte ceva imposibil de realizat. Arhimede şi matematicienii greci intuiseră că acest număr nu e raţional, dar o primă demonstraţie veritabilă a apărut abia în 1794, opera matematicianului Adrien-Marie Legendre. În 1882, Ferdinand von Lindemann a demonstrat că, mai mult, π e chiar transcendent, astfel că nici o putere a sa şi nici o combinaţie de puteri ale sale nu poate fi raţională. Numărul π e deci foarte neprietenos şi, până la urmă, metoda cea mai bună ca să-l înţelegem e tot teoria proporţiilor şi metoda exhaustiei. Iată enunţul lui Arhimede:

> Propoziţia 3. Circumferinţa oricărui cerc e triplul diametrului şi îl depăşeşte cu mai puţin de o şeptime a diametrului şi cu mai mult de zece şaptezeci şi unu zecimi.

Altfel spus, Arhimede demonstrează că π e curpins între $3 + (10/71)$ şi $3 + (1/7)$. Demonstraţia se obţine cu metoda exhaustiei, înscriind şi circumscriind cercul cu poligoane având până la 96 de laturi!

În tratatul despre *Cuadratura parabolei*, Arhimede foloseşte o exhaustie cu triunghiuri pentru a demonstra că aria *segmentului de parabolă*, adică a părţii din plan cuprinse între parabolă şi o dreaptă care-o intersectează, ca în figura 3.4, e echivalentă cu 2/3 din aria dreptunghiului circumscris.

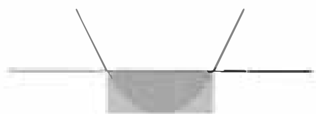


Figura 3.4

Aceste două rezultate îi aduc rapid celebritatea, dar rezultatul cu care se mândrește cel mai mult Arhimede e găsirea ariei sferei, din tratatul *Despre sferă și cilindru*, în introducerea căruia scrie:

> În continuare, găsind eu niște teoreme demne de a fi studiate, le-am demonstrat. Iată-le: întâi, că suprafața sferei e împătritul cercului său maxim* [...] În afară de acestea: că orice cilindru cu baza egală cu cercul maxim al unei sfere și cu înălțimea egală cu diametrul e o dată și jumătate sfera, iar suprafața sa totală e și ea o dată și jumătate suprafața sferei. [...]
>
> Aceste proprietăți erau dintotdeauna inerente naturii figurilor menționate, dar nu erau cunoscute de cei care s-au ocupat cu geometria, din moment ce nici unul dintre ei nu înțelesese că aceste figuri sunt comensurabile. De aceea, eu nu m-aș codi să compar aceste proprietăți cu speculațiile altor geometri și cu acele teoreme ale lui Eudoxos despre figurile solide care, după mine, sunt excelente, anume că orice piramidă e o treime din prisma cu aceleași bază și înălțime, și că orice con e o treime din cilindrul cu aceleași bază și înălțime.

Notând cu $S(r)$ suprafața sferei de rază r, Arhimede spune că e cvadruplul cercului său maxim, adică $S(r) = 4\pi r^2$. Mai spune și că cilindrul circumscris, ca în figura 3.5, are suprafața o dată și jumătate cât suprafața sferei, deci

$$\frac{3}{2}S(r) = (2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2)$$

ceea ce se reduce la formula precedentă.

Se povestește că Arhimede a cerut ca figura 3.5 să-i fie sculptată pe mormânt, în amintirea acestei mari descoperiri. Ne-o confirmă Cicero care scrie:

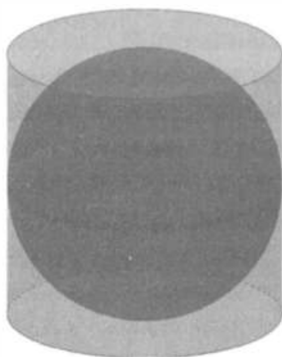


Figura 3.5

* În textele românești, termenul încetățenit este „cerc mare". (*N. tr.*)

> Pe când eram chestor, am căutat mormântul lui Arhimede, despre care siracuzanii nu știau nimic, chiar tăgăduiau că ar exista – l-am găsit înconjurat și acoperit de tufișuri și ramuri. Cunoșteam de fapt niște versuri scurte despre care aflasem că ar fi scrise pe monumentul său, conform cărora deasupra mormântului ar trebui să se afle o sferă cu un cilindru. Așadar, în timp ce le treceam în revistă pe toate cu privirea, am observat o coloană mică ce abia se vedea dintre tufișuri și pe care se afla desenul cu o sferă și un cilindru.

Din figura 3.5 se inspira până de curând și logoul Uniunii Matematice Italiene (figura 3.6).

Să dăm o demonstrație acestei teoreme, una în spiritul lui Arhimede; vrem să demonstrăm că suprafața sferei e egală cu suprafața laterală a cilindrului circumscris. Tăiem cilindrul cu plane orizontale (deci paralele între ele), obținând niște gulere, atât pe sferă, cât și pe cilindru (vezi figura 3.7).

Suprafețele sferei și cilindrului sunt sumele suprafețelor gulerelor obținute feliind întreaga sferă. Atunci ne va fi suficient să demonstrăm că aria unui guler de pe sferă e egală cu aria gulerului corespunzător de pe cilindru.

Să aproximăm gulerul sferic cu gulerul conic ce are ca generatoare segmentul tangent la sferă; luând felii din ce în ce



Figura 3.6

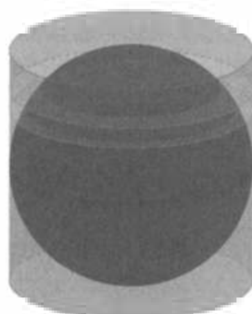


Figura 3.7

mai înguste, aproximarea aceasta se justifică cu principiul exhaustiei.

Aria gulerului cilindric e $2\pi r \cdot h$; în notațiile figurii 3.8, obținută ca secțiune cu un plan care trece prin axa cilindrului, aria gulerului conic e $2\pi s \cdot d$. Cele două cantități sunt egale dacă $r \cdot h = s \cdot d$.

Dar cele două triunghiuri din figura 3.8 sunt asemenea, deci au laturile omoloage proporționale, anume

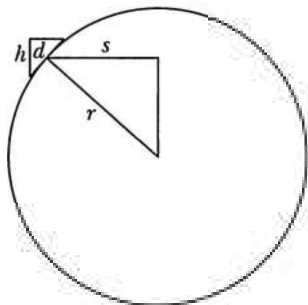


Figura 3.8

$$\frac{r}{d} = \frac{s}{h}$$

adică exact ce voiam!

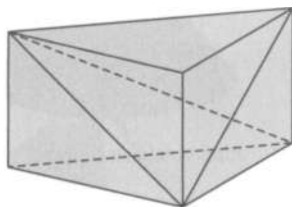
Arhimede mai spune că volumul cilindrului circumscris e o dată și jumătate cât volumul sferei. Notând cu $V(r)$ volumul sferei de rază r, am avea deci

$$\frac{3}{2}V(r) = 2r \cdot \pi r^2, \quad \text{adică} \quad V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Pentru demonstrația acestei formule, vom folosi cele două rezultate despre piramidă și con menționate de Arhimede și atribuite lui Eudoxos, care se găsesc în Cartea a XII-a din *Elemente*.

> Propoziția 7. Orice prismă cu baza triunghiulară se împarte în trei piramide egale între ele și având baza triunghiulară. De aici urmează în mod evident că orice piramidă e a treia parte dintr-o prismă care are aceeași bază și aceeași înălțime cu piramida.

Demonstrația e evidentă dacă ne uităm la figura 3.9 care arată modul în care prisma triunghiulară poate fi împărțită în trei piramide. Oricare două dintre aceste piramide au baza și înălțimea egale, chiar dacă alegerea bazei depinde de cele două piramide pe care vrem să le comparăm.


Figura 3.9

Propoziția aceasta implică:

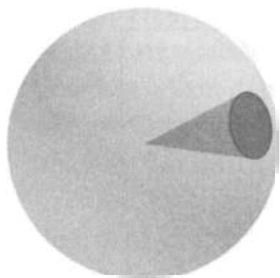


Figura 3.10

Propoziția 10. Orice con e a treia parte din cilindrul cu aceleași bază și înălțime.

$$V_{con} = \frac{1}{3}\text{aria bazei} \cdot \text{înălțimea}$$

Calculul volumului sferei se obține subîmpărțind sfera în multe conuri cu baza pe suprafața sferei și cu vârful în centrul sferei, ca în figura 3.10. Volumul sferei e egal cu suma volumelor tuturor conurilor care o acoperă:

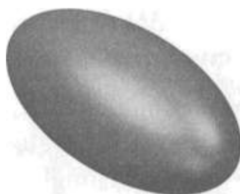
$$V(r) = \text{suma după toate conurile}\left(\frac{1}{3}\text{ aria bazei} \cdot r\right)$$
$$= \frac{1}{3}\text{ aria sferei} \cdot r = \frac{1}{3}4\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Mulți ani mai târziu, Galilei redemonstrează această formulă folosind un raționament ușor diferit, cunoscut azi sub numele de *castronul lui Galilei**.

Arhimede consideră și alte suprafețe, cum ar fi acelea obținute prin rotația unei conice în jurul unei axe ale sale, pe care azi le numim *cuadrice* – vedem două exemple în figura 3.11.



Hiperboloid cu o pânză



Elipsoid

Figura 3.11

* *Scodella* în original. (*N. tr.*)

În secolul XVIII apare conceptul de *ecuație a unei suprafețe*, în direcția indicată de Descartes pentru curbe. O ecuație de tipul $f(x,y,z)=0$, unde $f(x,y,z)$ e o funcție de trei variabile, presupusă suficient de regulată, de exemplu polinomială, oricum continuă și derivabilă în raport cu fiecare dintre variabile. Funcția stabilește o legătură între coordonatele carteziene (x,y,z) ale unui punct din spațiu ce caracterizează punctele suprafeței.

Când f e un polinom, suprafața se numește *suprafață algebrică*, iar gradul polinomului se numește *gradul suprafeței.*

Un plan e dat de o ecuație liniară, de exemplu $3x-2y+z-2=0$; planele sunt suprafețe de gradul 1. Sfera cu centrul în origine și raza r are ecuația $x^2+y^2+z^2-r^2=0$; are gradul 2 și e o cuadrică.

Matematicianul francez Antoine Parent a fost printre primii care au studiat suprafețele folosind ecuațiile, folosind deci forța algebrei. Problema vizualizării unei suprafețe date printr-o ecuație e mai grea decât în cazul curbelor. Se încearcă rezolvarea ei fie desenând o proiecție a suprafeței pe un plan, fie cu modele concrete din ceară sau din alt material maleabil.

Tehnologia digitală de azi e foarte utilă; de exemplu, putem folosi modul 3D al GeoGebra sau programul Surfer (se obține, cu instrucțiuni și exemple, de pe pagina https://imaginary.org/program/surfer).

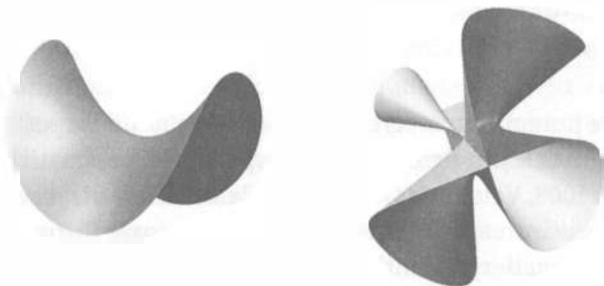


Figura 3.12



$$\left(x^2 + \frac{9}{4}y^2 + z^2 - 1\right)^3 - x^2z^3 - \frac{9}{80}y^2z^3 = 0$$



$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = 0$$



$$(x^2 + y^2 + z^2 - 4)\,x = 0$$

Figura 3.13





Figura 3.14

Imaginile din figura 3.12 au fost realizate cu Surfer şi reprezintă cuadrica de ecuaţie $bx^2 - cy^2 - az = 0$ şi una dintre suprafeţele introduse de Parent, de ecuaţie

$$\frac{y}{a+x} = \sqrt{\frac{z-x}{z}}$$

Ne putem amuza construind suprafeţe noi, cu aspect ciudat precum cele din figura 3.13, cu respectivele lor ecuaţii.

În 2008, Valentina Galati, elevă de liceu, a realizat cu Surfer o galerie întreagă de suprafeţe foarte frumoase (https://imaginary.org/gallery/valentina-galata) printre care cele două din figura 3.14.

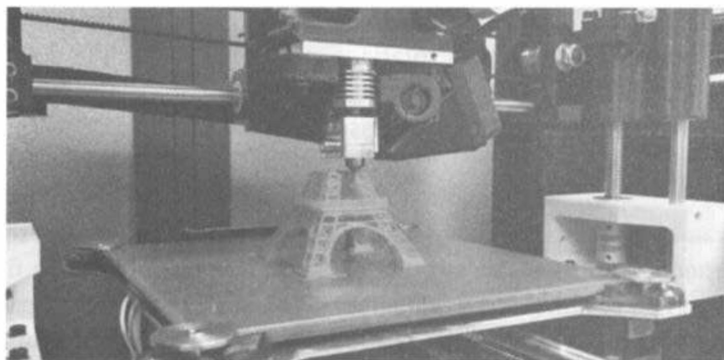


Figura 3.15

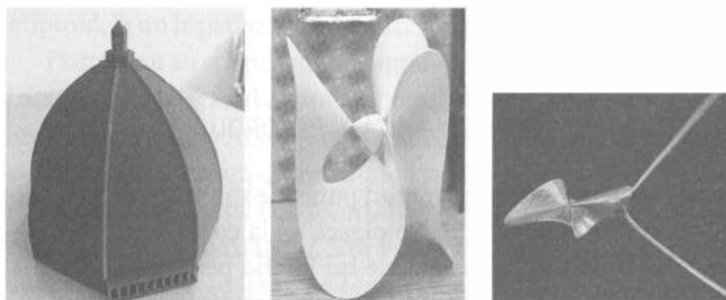


Figura 3.16

Fab lab e azi un formidabil spaţiu de „creaţie“, inclusiv pentru suprafeţe. O imprimantă 3D (figura 3.15) e capabilă să „citească“ ecuaţiile unor suprafeţe, apoi să le realizeze ca obiecte solide din orice fel de materiale: răşini colorate, aur sau chiar ciocolată. Cu doar puţină pregătire tehnică, dar cu bun-gust geometric şi cu un pic de sensibilitate artistică, oricine poate crea obiecte utile şi frumoase, îşi poate traduce ideile în prototipuri sau poate produce bijuterii şi dulciuri speciale.

Figura 3.16 prezintă câteva imagini de obiecte create cu imprimanta 3D de la Muzeul Ştiinţelor din Trento sau de Oliver Labs, într-un „magazin on line“ ad-hoc: http://math-sculpture.

com/. Prima dintre ele e un model al cupolei lui Brunelleschi, suprafață obținută prin rotația „lănțișorului". Celelalte două sunt suprafețe cubice „pentru salon și ca podoabă".

Suprafețele mai pot fi descrise și parametric, ca puncte din spațiu ale căror coordonate carteziene $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, sunt descrise de funcțiile $x(u,v)$, $y(u,v)$ și $z(u,v)$ atunci când parametrii u și v variază continuu. Funcțiile acestea se numesc *ecuații parametrice* ale suprafeței. Sfera, de exemplu, poate fi descrisă parametric cu *latitudinea* și *longitudinea*: acești doi parametri ne fixează poziția pe globul terestru, primul determinând distanța față de ecuator, al doilea față de un meridian fixat (prin convenție internațională, cel care trece prin observatorul din Greenwich).

SUPRAFEȚELE CU SINGULARITĂȚI. RECORDURI

Și pentru suprafețe se pot defini punctele singulare și punctele nesingulare (sau netede). Se pleacă de la considerații geometrice, asemănătoare cu cele ale lui Euclid pentru tangenta la un cerc, și se definește *planul tangent* la suprafață într-un punct P ca fiind acel plan care trece prin P și cu proprietatea că, cel puțin în vecinătatea lui P, nu există vreun alt plan între el și suprafață. Alternativ, planul tangent poate fi definit ca fiind generat de toate dreptele tangente în P la curbele de pe suprafață care trec prin P. Dacă acest plan există și e unic, punctul se numește neted, iar planul, tangent.

Dreapta normală la o suprafață într-un punct neted e dreapta perpendiculară pe planul tangent în acel punct.

Dacă suprafața e definită printr-o ecuație carteziană, putem decide ușor dacă un punct e neted folosind calcule algebrice: e neted dacă și numai dacă valorile celor trei derivate ale funcției în raport cu toate variabilele nu se anulează simultan în acel punct. În acest caz, putem determina ușor și ecuația carteziană a planului tangent.

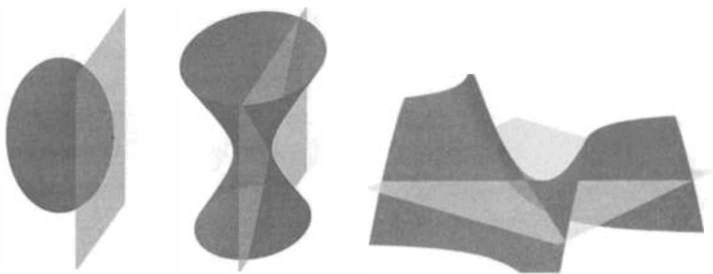


Figura 3.17

Imaginile din figura 3.17, realizate cu GeoGebra3D, arată planul tangent la trei cuadrice în anumite puncte, respectiv la un elipsoid, la un hiperboloid cu o pânză și la un paraboloid eliptic.

Planele nu au singularități. Suprafețele pot avea singularități începând de la gradul al doilea: conul, de ecuație $x^2+y^2+z^2=0$, are o singularitate în origine, după cum se vede în figura 3.18.

În secolul trecut, comunitatea matematică a intrat, mai mult sau mai puțin conștient, într-un fel de competiție în domeniul singularităților. Era vorba de a găsi, printre toate suprafețele de grad fixat, pe acelea cu numărul maxim de singularități. În figura 3.19 apar „câștigătoarele" primelor categorii (desenate cu Surfer): cubica lui Cayley, cu 4 singularități, cuartica lui Kummer, cu 16 singularități, cvintica lui Togliatti, cu 31 de singularități, și sestica lui Barth, cu 65 de singularități.

Descoperitorii acestor suprafețe sunt mari matematicieni europeni; al treilea e matematicianul italian Eugenio Giuseppe Togliatti (1890–1977), fratele lui Palmiro, secretarul, timp de mulți ani, al Partidului Comunist Italian.

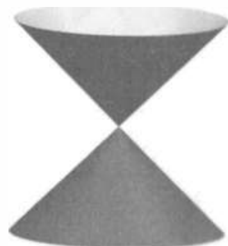


Figura 3.18

Suprafețele acestea pot fi realizate cu o imprimantă 3D și puse în valoare ca obiecte decorative în salon (figura 3.20). În realitate, nu e chiar la îndemână, adesea e nevoie să fie imprimate pe porțiuni mici care

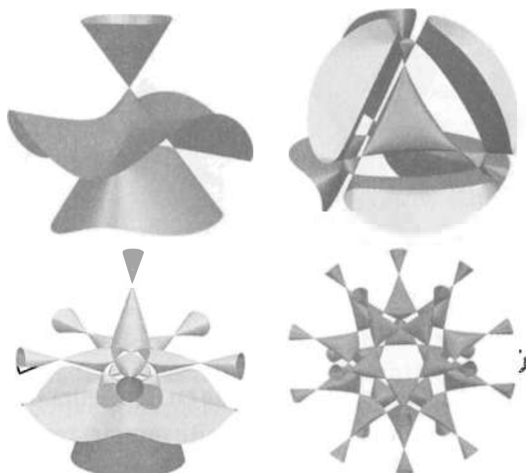


Figura 3.19

trebuie apoi lipite. Îmi închipui că sculptorul și orfevrul italian Benvenuto Cellini a avut de rezolvat probleme similare când a topit și apoi l-a asamblat pe Perseu sau numeroasele solnițe ornamentale pe care le-a produs. Pot fi cumpărate pe web, deja printate, de exemplu din magazinul Oliver Labs despre care am pomenit mai sus.

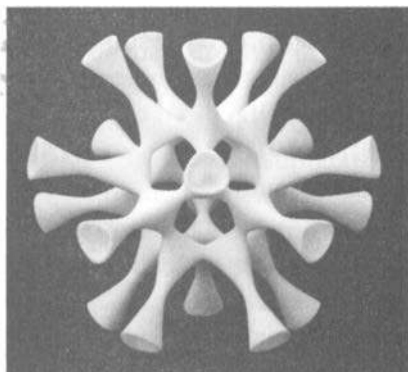




Figura 3.20

Cât despre suprafețele de grad mai mare sau egal cu 7, sunt cunoscute suprafețe de acest tip cu multe singularități, dar încă nu s-a reușit găsirea „campioanelor" categoriei. În 2008, matematiciana italiană Antonella Sarti a descoperit o suprafață de gradul 12 cu 600 de noduri (figura 3.21); chiar dacă e o suprafață record pentru numărul de singularități, tot nu se știe dacă acesta e sau nu recordul pentru suprafețele de gradul 12. Oricum, matematicianul japonez Yoichi Miyaoka a demonstrat că o asemenea suprafață nu poate avea mai mult de 645 singularități.



Figura 3.21

DRUMUL CEL MAI SCURT

Sunt foarte multe curbele care pot sta pe o suprafață; de exemplu, intersectând suprafața cu plane se obțin așa-numitele *secțiuni plane*.

Să fixăm două puncte pe o suprafață și să considerăm toate curbele de pe ea care le unesc. O problemă naturală e găsirea, dacă există, a celei sau a celor de lungime minimă: o asemenea curbă se numește *geodezică*. Ne lovim adesea de această problemă în viața de zi cu zi: de exemplu, când mutăm obiecte pe un plan, ca să minimizăm efortul le deplasăm în linie dreaptă. Sau la munte, în timpul unei drumeții, când avem de traversat o vale, căutăm parcursul cel mai scurt știind prea bine că nu putem zbura, ci suntem obligați să rămânem pe suprafața terestră; alegerea unui traseu geodezic bun depinde de experiență. De asemenea, când legăm un sul de hârtie cu o sfoară, aceasta se așază de-a lungul unei geodezice a cilindrului format de sul.

În general, un mod concret pentru a construi o geodezică e tocmai dispunerea unui fir bine întins între cele două puncte.

Căutarea unei geodezice între două puncte e o problemă „variațională"; nu e deci de mirare că primul care și-a pus problema *in superficie quacumque ducere lineam inter duo puncta brevissima* (trasarea liniei celei mai scurte între două puncte oarecare) a fost Johann Bernoulli, în 1697. De fapt, ce voia el era să înțeleagă cum *natura operari per modus et vias faciliores et expeditiores* (operează natura prin mijloace și căi mai ușoare și mai rapide).

Bernoulli a studiat întâi problema pe suprafețe de rotație, abia apoi pe suprafețe generale; a introdus și el conceptul de ecuație a unei suprafețe, ca instrument necesar pentru obținerea ecuației geodezicei.

Geodezicele unei suprafețe sunt caracterizate de o proprietate fundamentală care, dacă e formalizată matematic în mod convenabil, permite determinarea lor cu ajutorul ecuațiilor. Proprietatea derivă dintr-un procedeu folosit în topografie: se fixează doi țăruși pe suprafață, unul în punctul de plecare, *A*, și unul într-un punct apropiat, *B*, în direcția punctului în care trebuie să ajungem. Apoi se fixează țăruși în puncte succesive, *C*, *D*, ..., mereu în direcția punctului în care vrem să ajungem, dar în așa fel încât pentru un observator din *A*, țărușul din *C* să fie ascuns de cel din *B*, pentru un observator din *B*, țărușul din *D* să fie ascuns de cel din *C* și așa mai departe, până ajungem în punctul fixat.

Procedând astfel în plan, obținem o dreaptă – într-adevăr, geodezicele planului sunt dreptele.

Să încercăm acum să înțelegem această proprietate din punct de vedere matematic. Să observăm în primul rând că țărușii sunt *normali*, adică perpendiculari pe suprafața *S* și că, ținând cont de felul cum îi dispunem, fiecare stă într-un plan care trece prin punctul precedent și prin cel succesiv. Trecând la limită, adică presupunând că punctele *A*, *B*, *C* etc. se apropie indefinit unul de altul, planul acesta va coincide cu planul osculator al curbei căutate; așadar, *planul osculator în orice punct*

al unei geodezice conţine dreapta normală la suprafaţă în acel punct, adică planul osculator la geodezică e normal la suprafaţă.

De altfel, cu tehnica firului întins între două puncte pe suprafaţă, Johann Bernoulli a observat că, pentru a menţine firul în echilibru, planul osculator trebuie să fie normal la suprafaţă.

Avem deci două definiţii ale curbei geodezice, una mai intuitivă – curba cea mai scurtă între două puncte –, a doua mai formalizată – curba al cărei plan osculator în orice punct conţine dreapta normală la suprafaţă în acel punct. Să observăm că prima e o proprietate internă, sau intrinsecă, a suprafeţei, punctele din spaţiul ambient al suprafeţei neintervenind, în timp ce a doua e o proprietate exterioară care depinde, prin intermediul dreptei normale şi a planului osculator, de felul cum e poziţionată suprafaţa în spaţiul ambient.

Am observat deja că prima definiţie o implică pe a doua. Faptul că o curbă pe suprafaţă având proprietatea că planul său osculator conţine dreapta normală la suprafaţă e o curbă de lungime minimă e mai delicat de verificat şi e adevărat numai dacă acea curbă e cuprinsă într-o regiune mică a suprafeţei – spunem că e o proprietate locală.

Dacă suprafaţa e definită cu ecuaţii (carteziene sau parametrice) definiţia cu planul osculator conduce la *ecuaţia diferenţială a geodezicei*; soluţia ei furnizează, cel puţin local, ecuaţia curbei geodezice. Tipul de calcule necesare e asemănător celor făcute pentru brahistocronă în capitolul precedent, iar dificultatea lor depinde şi de complexitatea ecuaţiei suprafeţei.

Metoda ţăruşilor sugerează că din orice punct al suprafeţei izvorăsc o infinitate de geodezice, anume câte una în fiecare direcţie tangentă la suprafaţă. Direcţia geodezicei din punctul P se numeşte *condiţie iniţială*; se poate arăta că soluţia ecuaţiei diferenţiale a geodezicelor depinde univoc de această condiţie iniţială: fixată direcţia, există (local) o singură soluţie.

Când căutăm geodezicele pe suprafaţa terestră cu metoda topografică, nu vom ajunge să trasăm linii drepte (de altfel, nici nu există drepte pe sferă). Vom obţine de fapt porţiuni de

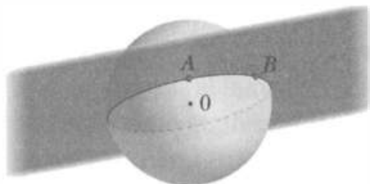


Figura 3.22

cercuri maxime, obținute prin intersectarea sferei cu un plan care trece prin cele două puncte și prin origine, ca în figura 3.22.

Pe de altă parte, e evident că cercurile maxime sunt singurele curbe pe sferă ale căror plane osculatoare conțin normalele la sferă în fiecare punct.

În manieră empirică, așa cum proceda Bernoulli (*rationem experientiae*), putem și să întindem bine o coardă între două puncte și să observăm că aceasta se așază de-a lungul unui cerc maxim. Ca să aflăm ruta zborului Milano-Los Angeles, întindem pe mapamond un fir între aceste două orașe: vom descoperi că cercul maxim trebuie să treacă pe deasupra Islandei și a Groenlandei. Piloții și, mai ales, sistemele automate de navigație, sunt familiarizați cu geodezicele globului terestru...

Pe un cilindru, geodezicele sunt curbe care, atunci când cilindrul e desfășurat pe plan, devin segmente de dreaptă; de exemplu, elicele circulare, ca în figura 3.23.

În general, pe o suprafață desfășurabilă, geodezicele sunt curbe care devin segmente de dreaptă când suprafața e desfășurată pe plan.

Pe o suprafață de rotație, obținută rotind o curbă plană în jurul unei axe de rotație, distingem două tipuri de curbe speciale: *meridianele*, obținute intersectând cu un plan care trece prin axa de rotație; și *paralelele*, obținute intersectând cu un plan perpendicular pe axa de rotație. Meridianele sunt geodezice. În schimb, nu toate paralelele sunt geodezice, ci numai acelea care se obțin din rotația punctelor de pe curba generatoare în care vectorul tangent la ea e paralel cu axa de rotație. Pe sferă, ecuatorul e unica paralelă geodezică.

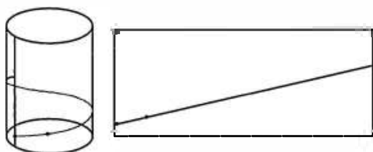


Figura 3.23

În figura 3.24, sunt geodezice meridianul m și paralelele prin punctele P_1, P_2, P_3, dar nu și cel prin P_4.

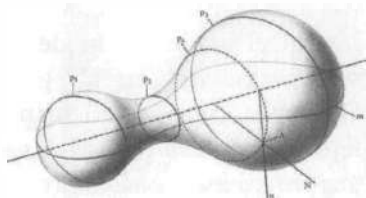


Figura 3.24

Pe o suprafață (completă), curbele geodezice sunt echivalentele dreptelor de pe plan: satisfac aceleași caracteristici pe care Euclid le impunea unei drepte. Într-adevăr, fiind curbe, sunt lungimi lipsite de lărgime (Definiția 2 a lui Euclid), iar ca geodezice stau la fel față de punctele lor (Definiția 4). Prin orice două puncte suficient de apropiate trece o geodezică și numai una singură (Postulatul 1). Ipoteza asupra apropierii punctelor e necesară: gândiți-vă la geodezicele sferei: dacă punctele sunt *antipodale* (un punct P de pe sferă se numește antipodal față de Q dacă dreapta PQ trece prin centrul sferei), prin ele trec o infinitate de cercuri maxime. Dacă nu sunt antipodale, atunci există un singur plan care trece prin ele și prin centrul sferei, acesta determinând geodezica prin cele două puncte.

În fine, faptul că orice geodezică poate fi prelungită la infinit (Postulatul 2) nu e întotdeauna adevărat, ci depinde de suprafața pe care stă geodezica: suprafața trebuie să fie *completă*, adică închisă și fără frontiere care s-o întrerupă. Planul și sfera sunt complete.

TEOREMA „EGREGIUM“ A LUI GAUSS

Multă vreme, suprafețele erau gândite ca înveliș al unui corp solid: Leonhard Euler vorbește încă despre *De superficiebus corporum* și despre *De solidis quorum superficiem in planum explicitare licet*.

Cel care dezvoltă mult conceptul de suprafață e Carl Friedrich Gauss, *Princeps mathematicorum* (prințul matematicienilor). Prin rezultatele fundamentale și surprinzătoare pe care

le-a demonstrat, el a creat un domeniu de studiu autonom în interiorul geometriei moderne. În *Disquisitiones generales circa superfices curvas* (Cercetări generale privind suprafețele curbe, Göttingen, Typis Dieterichianis, 1828), el vorbește despre suprafețe *non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum cuius dimensio una pro evanescente habetur* (nu ca limite ale unor corpuri solide, ci ca niște corpuri solide la care una dintre dimensiuni dispare).

Gauss era un savant deloc modest și se considera cel mai mare matematician al vremurilor moderne; în schimb, îl vedea pe Arhimede drept cel mai important matematician al Antichității. La fel ca acesta din urmă, avea preferințe printre rezultatele sale și se pare că era deosebit de mândru de un rezultat pe care chiar l-a numit *egregium* (important). Chiar și azi, acest rezultat e numit, poate un pic ironic, teorema *egregium*; admite formulări diferite, mai mult sau mai puțin generale, inclusiv în dimensiuni mai mari.

Se povestește că Gauss i-ar fi expus principelui Saxoniei versiunea cea mai elementară a acestei teoreme, anume cea privind suprafața sferei, cu scopul de a-i permite acestuia să calculeze cu exactitate întinderea posesiunilor sale. Principele l-a recompensat pe măsură; apoi a fost și imortalizat pe bancnota germană de 10 mărci (figura 3.25; observați, pe revers, triangularea ducatului Hanovrei).

Să definim întâi obiectele și contextul teoriei noastre pe care o vom numi *geometrie sferică*. Să presupunem că vom lucra pe o sferă de rază R și că suntem constrânși să rămânem pe suprafață, adică nu putem nici să zburăm, nici să săpăm tuneluri.



Figura 3.25

În acest ambient geometric, dreptele, adică curbele geodezice care satisfac postulatele lui Euclid pentru drepte, sunt *cercurile maxime* – după cum am văzut în paragraful precedent.

Ca să dezvoltăm mai departe geometria, avem nevoie de câteva definiţii secundare, conform aceloraşi indicaţii ale lui Euclid pentru plan. Un *segment* e locul punctelor de pe un cerc maxim situate între două puncte numite *vârfuri*; un *triunghi* e dat de trei segmente astfel încât fiecare vârf al unui segment e vârf al încă unuia dintre cele trei segmente şi numai al unuia singur.

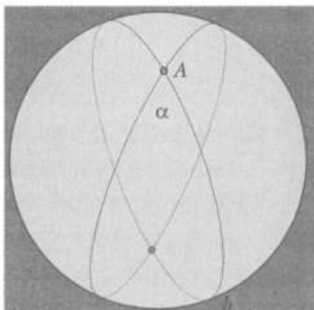


Figura 3.26

Două cercuri maxime care se taie determină în fiecare punct de intersecţie câte patru unghiuri; pentru noi, un *unghi* e dat de două cercuri maxime şi de alegerea unuia dintre cele patru. Partea de suprafaţă conţinută între două cercuri maxime care determină un unghi se cheamă *lunulă de mărime* α (figura 3.26).

Dacă două cercuri maxime coincid, vom spune că unghiul e plat şi că măsura sa este π. Aceasta e măsura în *radiani*; se poate alege şi măsura în grade, anume 180 de grade, dar pentru ce avem noi de făcut e mai bine să lucrăm în radiani. Unghiurile mai mici au măsuri proporţionale.

Observăm că aria lunulei de mărime α e egală cu $4\alpha R^2$: se vede uşor din teorema lui Arhimede şi din faptul că raportul dintre aria lunulei şi unghiul α e acelaşi ca raportul dintre aria sferei şi π, altfel spus:

$$\frac{\text{Aria}}{\alpha} = \frac{4\pi R^2}{\pi}$$

Cu aceste definiţii, putem acum enunţa rezultatul lui Gauss:

Teoremă. Aria unui triunghi sferic se obţine înmulţind pătratul razei sferei cu suma unghiurilor interioare din care se scade π:

$$\text{Aria triunghiului} = R^2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Demonstraţia se obţine citind convenabil figura 3.27.

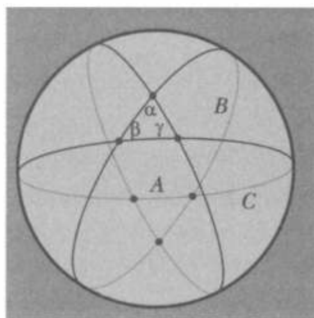


Figura 3.27

Să observăm că un triunghi determină trei lunule, câte una pentru fiecare unghi α, β, γ. De asemenea, fiecărui triunghi pe sferă îi corespunde unul egal, dar antipodal.

Fiecare punct de pe sferă aparține uneia dintre aceste trei lunule; în particular, punctele triunghiului și ale celui antipodal aparțin tuturor trei lunule, în timp ce toate celelalte puncte ale sferei aparțin doar uneia dintre lunule. De exemplu, punctul A, respectiv B sau C de pe figură, aparține doar lunulei definite de unghiul α, respectiv β sau γ.

Așadar, cu cele trei lunule acoperim întreaga sferă, acoperind de trei ori triunghiul și antipodalul său. În consecință, suma ariilor celor trei lunule e egală cu aria sferei la care se adaugă de patru ori aria triunghiului (nu trebuie uitat că aria triunghiului intră de șase ori în aria lunulelor; două dintre ele dau aria sferei, patru sunt în plus).

Punând laolaltă observațiile precedente într-o formulă, găsim:

$$4\pi R^2 + 4 \text{ aria triunghiului} = 4(\alpha + \beta + \gamma)R^2$$

Simplificând cu 4 și trecând în dreapta termenul πR^2 obținem rezultatul anunțat.

Teorema aceasta reprezintă din multe motive un punct de cotitură în istoria geometriei: probabil că Gauss nu greșea numind-o *egregium*. Înainte de a discuta câteva dintre importantele sale consecințe, să-i dăm o formulare mai generală, folosind conceptul de curbură a unei suprafețe.

CURBURA UNEI SUPRAFEȚE

Putem defini și pentru suprafețe curbura într-un punct nesingular. În cazul curbelor, conceptul acesta permite evaluarea

îndepărtării curbei de tangenta sa într-o vecinătate mică a punctului considerat; la suprafețe, ne interesează comportarea față de planul tangent.

Îi datorăm lui Euler primele considerații generale despre curbura suprafețelor: în 1760, apare un tratat cu titlul *Recherches sur la courbure des surfaces* (*Studii asupra curburii suprafețelor*) în care studiază comportarea suprafeței în vecinătatea unui punct prin intermediul curburii anumitor curbe obținute ca secțiuni plane. Mai precis, fixat un punct nesingular P pe suprafață, Euler consideră toate curbele plane care se obțin intersectând suprafața cu plane care trec prin P și conțin dreapta normală (perpendiculară) în P la planul tangent; aceste curbe se numesc *secțiuni normale*. Pentru fiecare dintre ele, Euler calculează curbura, k, și observă că aceasta variază continuu odată cu secțiunea normală. În consecință, trebuie să existe (cel puțin) o valoare maximă și una minimă a lui k, corespunzătoare unor secțiuni normale pe care le numește *principale*. Valorile respective, notate k_1 și k_2, se numesc *curburi principale*.

Euler demonstrează că cele două curburi principale determină curbura oricărei alte secțiuni normale prin formula

$$k = \cos^2\theta k_1 + \sin^2\theta k_2$$

unde θ e unghiul pe care secțiunea normală respectivă îl formează cu prima secțiune normală principală.

Curburile principale în orice punct al planului sunt identic nule; printr-un punct al sferei, curburile principale sunt toate egale cu inversul razei sferei (pentru că secțiunile normale sunt cercuri maxime).

Comportarea suprafeței față de planul tangent într-o vecinătate a punctului depinde de valorile lui k și deci de k_1 și de k_2. De exemplu, dacă k_1 și k_2 au același semn, atunci toate curburile secțiunilor normale au același semn și suprafața stă cu totul de o aceeași parte a planului tangent; în acest caz, punctul respectiv se zice *eliptic*. Un caz special de punct eliptic e acela în care $k_1 = k_2$, deci toate curburile normale sunt egale;

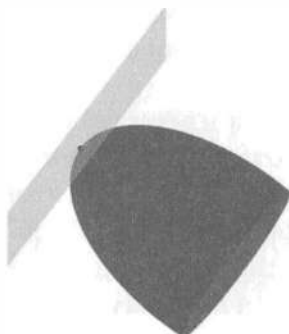


Figura 3.28

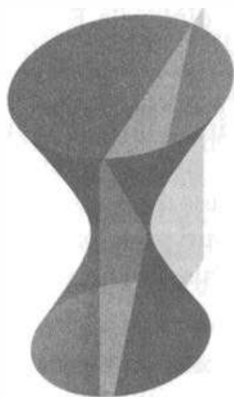


Figura 3.29

punctele acestea sunt numite *ombilicale* (figura 3.28). Sfera şi planul au toate punctele ombilicale*. Dacă au semne opuse, atunci unele secţiuni normale au concavitatea orientată de o parte a planului tangent, altele de cealaltă parte, deci suprafaţa e traversată în punctul P de planul tangent; un astfel de punct se zice *hiperbolic* (figura 3.29). Dacă una dintre cele două curburi principale e nulă, punctul se numeşte *parabolic*; e cazul punctelor unui cilindru, ale unui con, şi în general, al punctelor unei suprafeţe desfăşurabile.

Gauss propune o altă abordare a problemei, una foarte originală. Influenţat probabil de felul în care în astronomie întreaga boltă cerească e reprezentată pe o emisferă (cum vedem în planetarii), el a introdus o corespondenţă între punctele suprafeţei şi punctele unei sfere de rază 1 (sfera unitară), corespondenţă pe care azi o numim *aplicaţia lui Gauss*. Dat un punct P pe suprafaţă, consideră normala la suprafaţă prin P; aceasta determină o direcţie**, deci un punct pe sfera unitate pe care-l vom nota $N(P)$ – acesta e punctul corespunzător prin aplicaţia lui Gauss.

În cazul unui plan din spaţiu, direcţia normală e aceeaşi în fiecare punct, deci toate punctele sunt trimise de aplicaţia lui

* Mai mult, se poate arăta că sfera şi planul sunt singurele suprafeţe conexe care au toate punctele ombilicale. (*N. tr.*)

** E important să fixăm şi un sens pe normală, de exemplu să considerăm întotdeauna normala exterioară suprafeţei. (*N. tr.*)

Gauss într-un același punct al sferei. În cazul sferei, aplicația lui Gauss e identitatea, deci va acoperi întreaga sferă unitară când punctul variază.

Observațiile de mai sus sugerează că cu cât se îndepărtează mai puțin suprafața de planul tangent într-o vecinătate a punctului considerat, cu atât mai mică va fi porțiunea de sferă acoperită de imaginea aplicației lui Gauss.

Să luăm o porțiune mică de suprafață în jurul punctului P; pentru comoditate, să presupunem că vecinătatea e circulară, adică obținută prin intersectarea suprafeței cu o sferă de rază mică centrată în P. Fie A aria acestei mici porțiuni circulare și fie A' aria imaginii sale prin aplicația lui Gauss. Din cele spuse mai înainte, raportul acestor două arii furnizează o măsură a depărtării suprafeței de planul tangent.

Gauss a observat că e util să atribuie un semn (+ sau −) ariei A' în felul următor. Frontiera vecinătății circulare e un cerc pe suprafață; prin aplicația lui Gauss, acestuia îi corespunde un cerc pe sfera unitară. Să parcurgem în sens antiorar cercul de pe suprafață și să observăm cum se mișcă punctul corespunzător de pe cercul de pe sfera unitară: dacă se mișcă tot în sens antiorar, atribuim ariei semn pozitiv, dacă se mișcă în sens orar îi atribuim semn negativ (adică înmulțim A' cu -1). Așadar, semnul depinde de felul în care aplicația lui Gauss păstrează sau nu orientarea.

Figura 3.30 (extrasă din cartea *Differential Geometry of Curves and Surfaces* de Manfredo do Carmo) explică bine cele două cazuri.

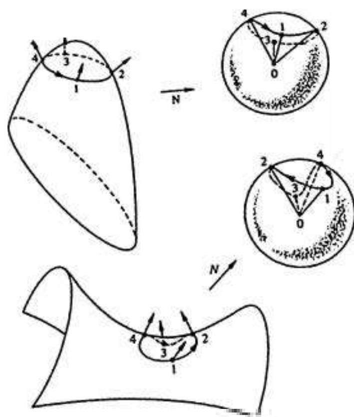


Figura 3.30

Gauss a numit aria A' cu semnul + sau − *curbura totală* a porțiunii de suprafață considerate. A definit apoi *curbura lui S în P* (azi numită

curbura gaussiană), notată $K(P)$, ca limită a raportului A'/A când porţiunea de suprafaţă considerată se strânge în jurul punctului P.

Se demonstrează apoi că există o legătură între curbura gaussiană şi curburile principale ale lui Euler, anume

$K = k_1 \cdot k_2$

Aşadar, cunoaşterea curburilor principale e mai preţioasă decât cunoaşterea lui K. Aceasta din urmă ne dă însă o idee despre cât de mult sau de puţin se îndepărtează suprafaţa de planul tangent, iar semnul său caracterizează punctele eliptice, hiperbolice sau parabolice.

Gauss consideră cazul în care porţiunea de suprafaţă e un triunghi geodezic T, adică un triunghi cu laturi formate de segmente de geodezice ale suprafeţei. Să notăm cu α, β, γ unghiurile sale interne şi cu A_r aria sa. Se poate arăta că imaginea lui T prin aplicaţia lui Gauss e un triunghi geodezic T pe sfera unitară, având aceleaşi unghiuri interne.

Să presupunem acum că curbura K e constantă în punctele triunghiului geodezic T; atunci definiţia curburii implică relaţia $K \cdot A_T = A'_{T'}$. Pe de altă parte, avem o formulă explicită pentru aria triunghiului geodezic T' de pe sfera de rază 1, anume $A'_{T'} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, aşadar

$K \cdot A_T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$

Să observăm că, în particular, pentru o suprafaţă cu curbura constantă -1, aria unui triunghi geodezic va fi $A_T = (\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$. În schimb, dacă curbura e nulă, cum e pe plan, cantitatea $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ e de asemenea nulă; în acest caz, e adevărată teorema potrivit căreia suma măsurilor unghiurilor interne ale unui triunghi plan e egală cu π.

Dacă curbura nu e constantă, membrul stâng al formulei de mai sus se înlocuieşte cu integrala de suprafaţă a curburii pe triunghiul T (care, intuitiv, e suma curburilor în toate punctele lui T), notată $\iint_T K$, obţinându-se următoarea formă generală a teoremei lui Gauss:

Teoremă. Fie T un triunghi geodezic pe o suprafață S, cu unghiuri interne α, β, γ. E valabilă relația:

$$\iint_T K = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Formula a fost extinsă de Pierre-Ossian Bonnet la cazul unor porțiuni de suprafață a căror frontieră nu e neapărat formată de curbe geodezice. Teorema aceasta, care azi e numită Gauss-Bonnet, e probabil rezultatul cel mai profund din teoria suprafețelor (diferențiabile) și are formulări echivalente și pentru varietăți de dimensiune mai mare decât 2.

O problemă importantă în teoria suprafețelor e posibilitatea comparării lor. Le-am putea considera bucăți de stofă *flexibile*, dar *inextensibile* și am putea vedea dacă pot fi suprapuse în urma unor îndoiri, înfășurări, desfășurări, dar fără să le tăiem; eventual, să vedem dacă putem să le suprapunem măcar local, pe bucățele. Dacă așa ceva e posibil, spunem că suprafețele sunt *izometrice* sau *local izometrice*. Ideea aceasta apare odată cu Gauss și e direct legată de probleme de geodezie, adică de măsurarea lungimilor sau ariilor pe suprafața terestră. În particular, chestiunea e importantă pentru construcția hărților geografice care presupun reprezentarea suprafeței terestre pe plan. În acest context, Gauss înțelege că sunt foarte importante acele proprietăți geometrice ale suprafețelor care sunt invariante la izometrii, adică se conservă când suprapunem o suprafață pe alta prin operații precum cele descrise mai sus.

Se conservă, de exemplu, lungimea curbelor de pe suprafețe, unghiurile și ariile porțiunilor mici de suprafață. Atunci și noțiunea de curbă geodezică, definită drept curba de lungime minimă, va fi invariantă. La fel, noțiunea de curbură gaussiană, pentru că e definită ca limită a unui raport de arii; faptul acesta poate părea azi evident, dar e, de fapt, apoteoza care închide teoria. Gauss spune:

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium *Theorema*. Si superficies curva in quamcunque aliam superficem

explicatur, mensura curvaturae in singuli punctis invariata manet*.

Curbura unei suprafețe e invariantă la izometrii locale, afirmă teorema *egregium* a lui Gauss.

În particular, rezultă că toate suprafețele desfășurabile, pe care le-am introdus mai înainte ca fiind izometrice cu planul, au curbură nulă în orice punct.

Teorema e extrem de importantă și dacă e citită „negativ“: dacă fixăm două puncte pe două suprafețe cu curburi diferite, e imposibil să construim vreo izometrie locală între orice fel de vecinătăți ale celor două puncte. Altfel spus, dacă două suprafețe au curburi diferite, nu le putem desfășura una pe cealaltă.

HĂRȚI GEOGRAFICE

Sfera are curbură constantă pozitivă, în timp ce planul are curbură nulă. Nu există deci izometrii locale între sferă și plan, nu putem desfășura sfera pe plan nici măcar pe porțiuni mici. În consecință, nici o hartă geografică a globului terestru nu va putea fi perfect fidelă din punct de vedere geometric; ca să construim hărți, va trebui să renunțăm la unele proprietăți geometrice ale sferei.

Dar dacă nu există hărți perfecte, ce folosim ca să ne orientăm într-un oraș, într-o zonă alpină sau chiar într-o croazieră cu iahtul pe Mediterana? Smart phone-ul nostru, dotat cu GPS și cu o „aplicație“ adecvată, vizualizează hărți care reprezintă sfera terestră pe plan: care e compromisul între o corespondență geometrică perfectă (izometrie) și o bună aproximație care ne permite să ne deplasăm fără să ne rătăcim?

---

* Formula din paragraful precedent conduce direct la această *Teoremă* remarcabilă. Dacă o suprafață curbă e aplicată pe orice altă suprafață, măsura curburii în fiecare punct rămâne neschimbată. (*N. tr.*)

Problema orientării în spaţiul pe care-l locuim e o constantă a istoriei noastre – individuale şi colective deopotrivă. Prima oară când ne-am dus să cumpărăm singuri pâine, mama ne-a dat indicaţii geografice clare, poate chiar şi vreo mică hartă rudimentară, indispensabile pentru a ajunge la brutărie şi de acolo înapoi acasă. Capacitatea de a ne organiza activitatea într-un mediu mai mult sau mai puţin întins se sprijină pe cunoaşterea acestui spaţiu; pentru unii, această cunoaştere e strâns legată de o imagine cartografică.

Alexandru cel Mare a ajuns în India şi mulţumită hărţilor geografice din epocă; mai târziu, Cristofor Columb a descoperit America dintr-o eroare de cartografiere, crezând că a ajuns în India. Eroarea a fost repede corectată, inclusiv cu colaborarea unor exploratori italieni curajoşi ca Amerigo Vespucci.

O frumoasă carte a istoricului Jerry Brotton [2013], intitulată *Istoria lumii în douăsprezece hărţi**, arată cum, de-a lungul veacurilor, progresul omenirii a fost mereu însoţit de rafinarea capacităţilor sale de a se orienta şi mişca în spaţiu.

Descoperirea şi colonizarea Americii au condus, se pare că pentru prima dată, la ideea unui premiu în bani pentru o descoperire ştiinţifică. În 1493, o bulă papală atribuie Spaniei pământurile de la vest de „meridianul care se află la 100 de leghe vest de Azore"; papa era un Borgia şi e uşor de intuit ale cui interese le reprezenta. Totuşi, nimeni nu ştia cum să determine efectiv acest meridian; aşa că Spania, care voia să ocupe teritoriile acordate, instituie în 1567 un premiu pentru rezolvarea acestei probleme.

Un matematician, astronom şi cartograf olandez din epocă, Gerardus Mercator (1512–1594), latinizarea numelui olandez Geert de Kremer (Geert „negustorul"), proiectează o hartă geografică originală şi inovativă, azi încă numită *proiecţie Mercator*. Figura 3.31 reprezintă această hartă, numită *Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendata accomodata* (1596),**

* Polirom, 2013. (*N. tr.*)

** *O nouă şi mai completă descriere a globului pământesc, adaptată în mod corect pentru uzul navigatorilor.* (*N. tr.*)

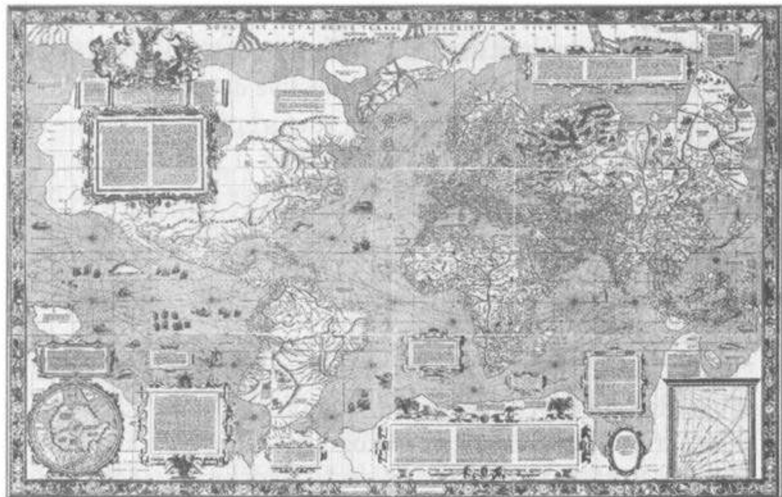


Figura 3.31

Nu ştim dacă Mercator a participat la concursul spaniol; în titlu, declară că interesul lui e să realizeze o hartă utilă în navigaţie. Să presupunem că suntem la cârma unei ambarcaţiuni care pleacă din Amsterdam; cu ajutorul busolei, putem localiza uşor Polul Nord, deci putem să dirijăm ambarcaţiunea de-a lungul unui traseu a cărui direcţie să facă cu direcţia nordului un unghi oarecare α. Ca să ne lămurim unde avem să ajungem, ne trebuie o hartă care să reprezinte sfera respectând mărimea unghiurilor; o hartă (sau o proiecţie) cu această proprietate se numeşte *conformă*. Pe o asemenea hartă, o dreaptă care trece prin Amsterdam şi face cu verticala un unghi α (măsurat spre stânga) va reprezenta fidel traseul nostru.

Proiecţia Mercator se foloseşte şi azi, de exemplu de către Google Maps care propune hărţi ca aceea din figura 3.32. Se vede uşor că, folosind un unghi de mărime mai mică decât $\pi/4$ (în direcţia vest) o să ajungem prin Groenlanda, dacă nu ne lovim întâi de Anglia ori de Islanda; în timp ce cu un unghi mai mare decât $3/4\pi$ vom ajunge în America de Sud.

Proiecţia Mercator păstrează unghiurile, deci şi forma continentelor, dar nu păstrează distanţele, nici ariile. Gândiţi-vă

Figura 3.32

că Groenlanda are o suprafață egală cu jumătate din cea a Uniunii Europene, ceva mai puțin de 2 milioane de kilometri pătrați una, și 4 milioane cealaltă; pe harta Mercator, Groenlanda pare mai mare decât Uniunea Europeană.

Construcția lui Mercator se bazează pe câteva idei geometrice interesante și chiar pe unele cunoștințe de analiză. Prima idee vine din geometria lui Euclid, în care dacă un triunghi e transformat în altul cu aceleași unghiuri, atunci se păstrează rapoartele lungimilor laturilor corespunzătoare. Două triunghiuri sunt asemenea, sau conforme, dacă unghiurile corespunzătoare sunt egale sau, *echivalent*, dacă laturile corespunzătoare sunt proporționale.

La fel, o hartă conformă, care păstrează deci unghiurile, trebuie să păstreze și rapoartele lungimilor de arce infinitezimale care izvorăsc, în orice direcție, din puncte aflate în corespondență.

Pe globul terestru pe care, pentru simplitate, îl presupunem perfect sferic, putem deci să localizăm două coordonate parametrice: *latitudinea*, care determină cu o mărime unghiulară (notată t) cât de departe suntem de ecuator, și *longitudinea*

care, tot cu o măsură unghiulară (notată *l*), ne spune cât de departe suntem față de un meridian fixat – prin convenție, cel care trece prin observatorul din Greenwich. Amintim că meridianele sunt cercuri maxime care trec prin poli (puncte antipodale fixate), în timp ce ecuatorul e cercul maxim format de punctele echidistante față de poli.

Mercator decide întâi că în proiecția sa meridianele se vor transforma în drepte paralele; mai precis, două meridiane care sunt la distanța *dx* pe ecuator vor fi transformate în două drepte paralele în plan, la distanță *dx* una de cealaltă. Proiecția aceasta se mai numește cilindrică, pentru că se obține proiectând sfera terestră din centrul ei pe cilindrul circumscris.

Pentru a avea proprietatea de conformitate, Mercator cere ca un dreptunghi infinitezimal, adică suficient de mic, să fie transformat prin proiecție într-un dreptunghi asemenea din plan, cu alte cuvinte, cu laturi proporționale cu ale celui de plecare. Dacă ne referim la figura 3.33, în care laturile dreptunghiului de pe sferă sunt notate *dl* și *dt*, iar cele ale dreptunghiului plan corespunzător sunt *dx* și *dy*, el cere ca $dy/dt = dx/dl$.

Cum *dx* e distanța la ecuator dintre cele două meridiane pe care stau laturile opuse ale dreptunghiului sferic, e evident că raportul *dx*/*dl* e egal cu raportul dintre lungimea ecuatorului și

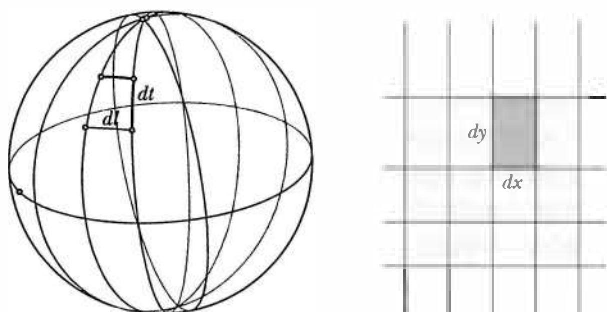


Figura 3.33

lungimea paralelei care trece printr-un punct al dreptunghiului, anume

$$\frac{dx}{dl} = \frac{2\pi}{2\pi\cos(t)} = \frac{1}{\cos(t)}$$

Combinând cele două identități de mai sus, obținem o ecuație diferențială care leagă variabilele y și t:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos(t)}$$

Ecuația asta se poate integra. Găsim soluția:

$$y(t) = \ln\left(\operatorname{tg}(t) + \frac{1}{\cos(t)}\right)$$

Corespondența care asociază unui punct de pe sferă cu longitudinea l și latitudinea t un punct din plan cu coordonatele $x = l$ și

$$y(t) = \ln\left(\operatorname{tg}(t) + \frac{1}{\cos(t)}\right)$$

e aplicația conformă numită proiecție Mercator. Nu e definită în poli, pentru care latitudinea e $\pi/2$, valoare pentru care funcția cosinus se anulează, deci $y(t)$ ar lua o valoare infinită.

Există și alte corespondențe conforme între sferă și plan. De exemplu, *proiecția stereografică* (față de Polul Nord) care asociază fiecărui punct P de pe sferă, diferit de Polul Nord, punctul din planul tangent în Polul Sud obținut ca intersecție dintre acest plan și dreapta care trece prin Popul Nord și prin P, ca în figura 3.34.

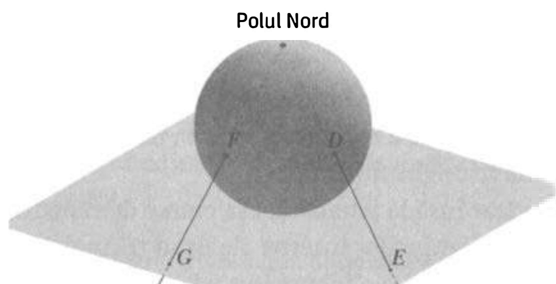


Figura 3.34

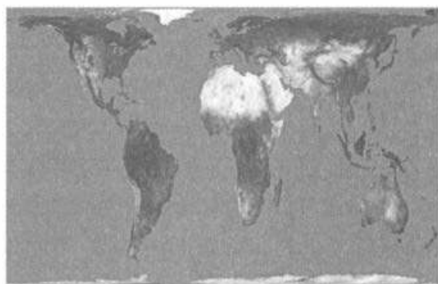



Figura 3.35

Se pot însă construi și corespondențe între sferă și plan care să păstreze alte proprietăți geometrice, de exemplu proiecții care păstrează ariile, numite *proiecții echivalente*. Matematicianul și cartograful Johann Heinrich Lambert a construit una în 1772; în 1973, istoricul Arno Peters a propus o alta, care anulează multe convenții geografice și, în consecință, chiar istorice. A fost numită *proiecția Gall-Peters* pentru că se pare că a fost folosită pentru prima dată în 1885, de James Gall, preot scoțian. În figura 3.35 apar o proiecție stereografică și una Gall-Peters.

GEOMETRII NEEUCLIDIENE

Să examinăm din nou formula lui Gauss pentru aria triunghiului (geodezic) sferic,

$$A_T = R^2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Conform acestei formule, în orice triunghi sferic, suma unghiurilor interne e mai mare decât π, iar *excesul* e proporțional cu aria triunghiului.

Am învățat însă la școală că, așa cum e demonstrat în *Elemente*, suma unghiurilor interne ale unui triunghi e egală cu 180 de grade. Nu e nici o încurcătură: la școală lucrăm numai cu triunghiuri plane, nu cu triunghiuri sferice.

Formula lui Gauss sugerează că o teorie geometrică, măsurile și teoremele ei depind de *spațiul care găzduiește* obiectele ei de studiu.

Una dintre marile noutăți ale concepției lui Gauss constă tocmai în considerarea suprafețelor ca spații autonome, adică *non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum cuius dimensio una pro evanescente habetur* (*nu ca frontiere de corpuri solide, ci ca niște corpuri solide la care una dintre dimensiuni dispare*). Ca să înțelegem mai bine noutatea conținută în această afirmație, vă propun să înlocuim cuvântul *solid* cu *spațiu*, deci să spunem că suprafața e „un spațiu cu o dimensiune care dispare".

Reverendul Edwin Abbott a introdus acest punct de vedere și în domeniile artistic și social, într-un scurt roman satiric despre societatea victoriană, intitulat *Flatland* (1884), a cărui acțiune se desfășoară într-o ipotetică lume bidimensională. Locuitorii acestei lumi sunt figuri geometrice care trăiesc într-un spațiu bidimensional în care reușesc totuși să reproducă unele caracteristici și contradicții ale societății timpului. Cel puțin din punct de vedere artistico-narativ, romanul demonstrează că un spațiu cu două dimensiuni poate găzdui o societate, povești și ființe dotate cu rațiune. Existența unei a treia dimensiuni, evanescentă în spațiul din Flatland, apare abia în partea a doua, când asistăm la întâlnirea dintre un pătrat cu o sferă, un obiect care provine dintr-un spațiu tridimensional numit Spaceland.*

Așadar, o suprafață poate fi concepută foarte bine drept spațiu autonom, bidimensional, în care se poate construi o geometrie. Nimic nou, s-ar zice, față de ce a făcut Euclid, care și-a dezvoltat întreaga geometrie pe plan. Dar sunt atât de multe suprafețe, nu doar planul. Ideea că spațiul ambient nu e unic e cu adevărat contraintuitivă; să ne aducem aminte cuvintele lui Kant, citate în primul capitol.

---

* Există și un foarte frumos film de animație (pe computer) după cartea lui Edwin Abbott, în acces liber aici: https://www.youtube.com/watch?v=eyuNrm4VK2w. (*N. tr.*)

Dacă dezvoltăm o geometrie cu *aceleași axiome și reguli*, dar în spații ambiente-suprafețe diferite ne așteptăm la teorii diferite, după cum se vede în teorema *egregium*.

Curbele geodezice se pot defini pe orice suprafață ca fiind cele mai scurte. Dacă suprafața e completă, aceste curbe geodezice satisfac cele patru cerințe ale lui Euclid pentru dreapta din plan, așa cum am văzut la sfârșitul paragrafului despre geodezice. Și triunghiul geodezic (la fel și celelalte poligoane) are o definiție generală: constă în trei segmente geodezice cu proprietatea că oricare două dintre ele au un singur vârf în comun.

Triunghiurile geodezice au totuși proprietăți diferite după cum sunt sferice sau plane: de exemplu, așa cum am demonstrat, suma unghiurilor lor interne e diferită.

Se poate arăta că enunțul: „suma unghiurilor interne ale unui triunghi e 180 de grade" e echivalent cu Postulatul V al lui Euclid. Dar acest postulat nu subzistă în geometria sferică: dată o dreaptă pe sferă (un cerc maxim), prin nici un punct exterior nu există vreo dreaptă paralelă la dreapta de plecare. Într-adevăr, pe sferă nu există drepte paralele, pentru că orice două cercuri maxime se întâlnesc (în exact două puncte)!

Gauss e primul matematician care intuiește existența unor geometrii care au toate axiomele și regulile după care funcționează echivalente cu cele din geometria euclidiană, cu excepția Postulatului V; le numește *geometrii neeuclidiene*. Nu există totuși scrieri explicite ale lui Gauss pe tema asta, doar aluzii în unele scrisori.

Să observăm că, cel mai probabil, pe-atunci, geometria sferică nu era privită cu adevărat ca o geometrie neeuclidiană, poate pentru că există perechile de puncte antipodale prin care trec nu una, ci infinit de multe drepte – cercuri maxime.

Ne putem face o idee despre ce gândea Gauss dintr-o scrisoare către avocatul Taurinus, din 1824:

> [...] faptul că suma unghiurilor interne ale unui triunghi nu poate fi *mai mică de 180 de grade*; acesta e adevăratul nod, bariera de care se lovesc toți. [...] Eu mă gândesc la asta de mai

> bine de 30 de ani și mă îndoiesc că alții s-ar fi ocupat mai mult decât mine de chestiunea asta. Ipoteza că suma celor trei unghiuri ar fi mai mică decât 180 de grade conduce la o geometrie foarte diferită de a noastră (euclidiană), care e consistentă [*im sich selbst durchaus konsequent ist*] și pe care am dezvoltat-o în mod atât de satisfăcător, încât pot rezolva orice problemă cu excepția uneia, care privește determinarea unei constante care nu pare să fie a priori. Cu cât mai mare se ia constanta asta, cu atât mai mult ne apropiem de geometria euclidiană, iar la infinit, cele două geometrii coincid. Teoremele acestei geometrii ne pot părea paradoxale și, nespecialiștilor, chiar lipsite de sens [...]. Toate eforturile mele pentru a găsi o contradicție sau o inconsecvență [*Inkonsequenz*] internă în această geometrie *neeuclidiană* au fost zadarnice. [...] Știm de fapt foarte puțin, sau nimic, despre adevărata natură a spațiului și riscăm să confundăm ceea ce ne apare ca nenatural cu ceva de-a dreptul imposibil. Dacă geometria neeuclidiană ar fi geometria adevărată și dacă acea constantă ar fi comparabilă cu mărimile pe care le măsurăm pe pământ ori pe cer, atunci ar fi posibil s-o determinăm *a posteriori*. De aceea, ocazional și în glumă, am exprimat posibilitatea ca geometria euclidiană să nu fie geometria cea adevărată.

Și încă, din alte scrisori, de data asta către Bessel (1829–1830):

> M-am convins apoi de mai multe lucruri, printre care de faptul că nu se poate stabili complet geometria *a priori*. [...] Trebuie să admitem cu umilință că, în timp ce numărul e un produs pur al minții noastre, spațiul are o realitate exterioară minții noastre, astfel că nu-i putem prescrie legile *a priori*.

Pe parcursul a peste două mii de ani, mulți matematicieni au încercat să deducă Postulatul V din precedentele, adică să demonstreze că nu există geometrii neeuclidiene. Sub ochii tuturor, geometria sferică ar fi putut să-i facă să înțeleagă că așa

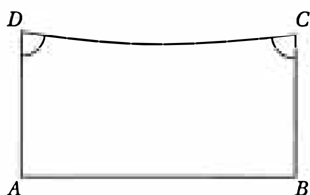


Figura 3.36

ceva nu era posibil; dar, cum am văzut deja, geometria sferică are caracteristici care n-o recomandau.

Problema, după cum cerea Gauss, consta în găsirea unei geometrii pentru care suma unghiurilor interne ale unui triunghi să fie mai mică de 180 de grade. Această posibilă geometrie va fi botezată, câțiva ani mai târziu, de către Felix Klein, *geometrie hiperbolică*.

Pionier al acestor studii fusese matematicianul iezuit Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733) care în cartea sa, *Euclides ab omni naevo vindicatus* (*Euclid curățat de orice pată*, Milano, 1733), a încercat să demonstreze prin reducere la absurd Postulatul V, presupunând existența unui patrulater neobișnuit, azi cunoscut după numele lui. Patrulaterul Saccheri are laturile opuse egale între ele, are două unghiuri adiacente de 90 de grade și celelalte două unghiuri ascuțite. Altfel spus, e un dreptunghi cu două unghiuri mai mici de 90 de grade (figura 3.36). În geometria euclidiană așa ceva nu poate exista; ceva similar există însă, cu unghiuri obtuze, în geometria sferică. Existența unui patrulater Saccheri e echivalentă cu existența unui triunghi cu suma unghiurilor interne mai mică decât 180 de grade.

Plecând de la existența patrulaterului său, Saccheri a dedus în mod logic o serie de consecințe care i s-au părut inacceptabile, comentând după cum urmează: „Ipoteza unghiului ascuțit e falsă în mod absolut, pentru că repugnă naturii liniei drepte." De fapt, el dezvoltase o serie de teoreme perfect valide și coerente în geometria hiperbolică; Girolamo Saccheri vedea și nu credea!

Și Nicolai Ivanovici Lobacevski (1792–1856), contemporan cu Gauss, propune, în 1829, o geometrie imaginară, cu un triunghi dreptunghic în care suma celorlalte două unghiuri e mai mică de 90 de grade. Presupunând universul guvernat de o geometrie de felul acesta, el estimează mărimea sistemului

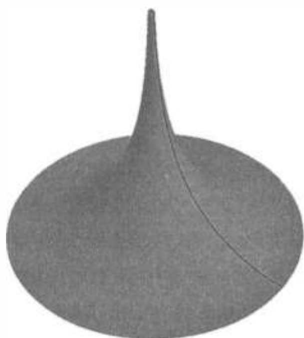
solar folosind un triunghi dreptunghic cu o catetă de mărimea diametrului orbitei terestre și cu un vârf opus stelei Sirius. Obține estimări foarte bune, chiar dacă folosește, din păcate, o valoare greșită pentru paralaxa lui Sirius.

În 1832, János Bolyai (1802–1860), ofițer în armata austro-ungară și matematician, publică un tratat despre geometriile neeuclidiene ca apendice al unei cărți a tatălui său, matematician la rândul lui. Acesta din urmă, speriat de felul excesiv în care fiul se consacrase problemei respective, îi scria la un moment dat: „Te implor, fiule, pentru numele lui Dumnezeu, mai lasă paralelele în pace. Trebuie să te temi de ele ca de femei ușoare, pentru că, asemenea lor, îți pot mânca tot timpul ajungând să-ți pierzi bunăstarea, liniștea spiritului și fericirea." Îl prezintă totuși lui Gauss, care refuză să-l ia ca student, scriind totuși despre el:

> Îl consider pe acest tânăr geometru Bolyai un geniu de prim ordin. [...] Să-l laud ar fi să mă laud. Pentru că întreg corpul lucrării sale coincide aproape exact cu propriile mele cugetări care mi-au ocupat mintea în ultimii treizeci sau treizeci și cinci de ani.

A mai fost nevoie de încă niște ani până să apară modele explicite pentru geometria hiperbolică. Prima contribuție fundamentală a venit din partea lui Eugenio Beltrami (1835–1900), matematician italian, apoi și senator al Regatului Italiei, în al său *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* (1868). Iată-i *incipit*-ul:

> În vremea din urmă, publicul matematic a început să se ocupe cu unele concepte noi care, dacă se vor impune, par destinate să schimbe în profunzime întregul țesut al geometriei clasice. Conceptele acestea nu sunt de dată recentă, imensul Gauss le îmbrățișase încă de la primii săi pași în cariera științifică și, chiar dacă nici una dintre scrierile lui nu conține vreo expunere explicită a lor, scrisorile lui stau mărturie pentru predilecția cu care le-a cultivat întotdeauna și atestă întreaga sa adeziune față de doctrina lui Lobacevski.


Figura 3.37

Beltrami consideră suprafețe cu curbură gaussiană constantă și, folosind formula lui Gauss, $K \cdot A_T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, intuiește că o geometrie hiperbolică, în care suma unghiurilor interne e mai mică decât π, se poate realiza pe o suprafață de curbură negativă.

Studiază întâi o suprafață care se obține prin rotația curbei tractrice în jurul asimptotei sale (am dat definiția în capitolul 2, vezi figura 2.26): e o *suprafață cu curbură constantă negativă*, motiv pentru care e numită *pseudosferă* (figura 3.37).

Pseudosfera are două defecte evidente care nu-i permit să concureze la titlul de model pentru o geometrie neeuclidiană. În primul rând, are o gaură: în topologie se spune că *nu e simplu conexă*, deci seamănă mai mult cu un cilindru decât cu un plan. Dar, mai ales, nu e completă, adică geodezicele sale nu pot fi prelungite la infinit, se întrerup pe cercul care e frontiera bazei. Figura 3.38 înfățișează o pseudosferă cu câteva geodezice (construită de M. Luminati).

Pentru a evita problema, Beltrami construiește o suprafață care *acoperă* pseudosfera, un fel de acoperire cu straturi succesive lipite între ele, care se apropie mereu de frontieră, dar nu ajung niciodată la ea. Suprafața asta are în continuare curbură negativă, dar e simplu conexă și completă, fiind deci un model bun pentru geometria hiperbolică. Beltrami chiar alătură lucrării sale teoretice construcții din hârtie ale acestei suprafețe; aceste *căști ale lui Beltrami* sunt încă păstrate la Departamentul de Matematică al Universității din Pavia (figura 3.39).


Figura 3.38

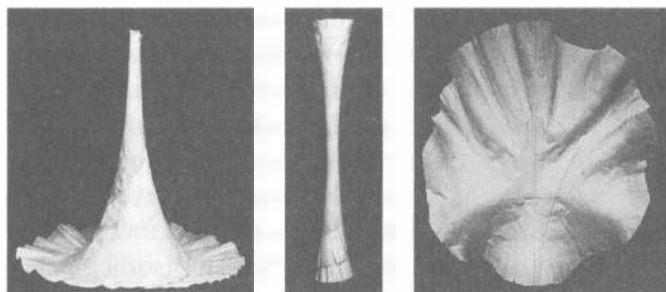


Figura 3.39

Studiul lui Beltrami e destul de complex, iar marele matematician Luigi Cremona, editor al revistei *Annali di Matematica*, îi va întârzia publicarea cu un an, considerând că unele argumente nu erau suficient justificate şi se bazau pe raţionamente circulare.

E momentul să prezentăm cititorului un fapt surprinzător, care confirmă în oarecare măsură temerile lui Gauss atunci când scria că „spaţiul are o realitate exterioară minţii noastre, astfel că nu-i putem prescrie legile *a priori*".

În lucrarea *Asupra suprafeţelor de curbură gaussiană constantă**, matematicianul David Hilbert (1862–1943) demonstrează următorul rezultat:

> Teoremă. În spaţiul euclidian, nu există nici o suprafaţă cu curbură constantă negativă care să fie completă.

Pentru a construi un model al geometriei hiperbolice complet, cu geodezice infinite, trebuie deci să ieşim cumva din spaţiul nostru obişnuit. Înţelegem acum de ce a fost nevoită geometria hiperbolică să aştepte atât de mult până să „se nască" în mintea umană.

În anul pe care-l petrece aşteptând un răspuns pozitiv de la Luigi Cremona, Beltrami studiază, împreună cu prietenul

* *Über Flächen von konstanter Krümmung, Trans. Amer. Math. Soc. 2* (1901), 87–99. (*N. tr.*)

și colegul său Felice Casorati, lucrarea matematicianului german Bernhard Riemann (1826–1866) *Ipotezele care stau la baza geometriei* (pe care o vom trata pe larg în capitolul următor). Aici voi nota doar că Beltrami folosește articolul lui Riemann pentru obiectivele sale, scriind o a doua lucrare cu titlul *Teoria fundamentală a spațiilor cu curbură constantă* care apare, ca și primul său studiu, în 1868.

Consideră semisfera din spațiul obișnuit, adică punctele sferei $x^2+y^2+z^2=1$ cu ultima coordonată pozitivă, $z>0$. Urmând indicațiile lui Riemann, introduce un mod de a măsura distanțele din spațiu diferit de cel uzual. Consideră ceea ce se cheamă o *metrică Riemann care nu e plată*. O să vedem în detaliu conceptul de metrică; aici, spun doar că dacă ds indică o porțiune infinitezimală a unui segment spațial, iar dx, dy, dz proiecția aceleiași porțiuni pe direcțiile carteziene, atunci lungimea sa nu e, așa cum ar cere teorema lui Pitagora, $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, ci

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{z}$$

Folosind această măsură a lungimilor, frontiera semisferei, dată de intersecția ei cu planul $z=0$, e infinit de îndepărtată de punctele interioare. În plus, curbele care se obțin intersectând semisfera cu plane verticale de ecuație $ax+by+c=0$ sunt geodezice, adică sunt curbe de lungime minimă (figura 3.40).

Pentru a demonstra acest fapt, Beltrami nu se poate baza pe metode experimentale, ca metoda țărușilor ori cea a firului întins. Distanța nu e cea standard, ci aceea abstractă propusă de Riemann, așa că, lucrând abstract și foarte atent, Beltrami determină ecuația diferențială a geodezicelor și probează că acele curbe descrise mai sus sunt soluții, deci sunt efectiv geodezice.

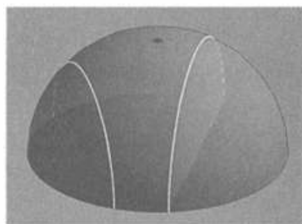


Figura 3.40

Aceste curbe verifică toate celelalte proprietăți ale dreptelor din plan. Într-adevăr, e evident că prin orice două puncte de pe emisferă

trece o singură curbă de acest tip, pentru că există un unic plan vertical prin două puncte date. Apoi, cum frontiera emisferei e la distanţă infinită de orice punct, deplasându-ne pe geodezică nu ajungem niciodată la frontieră; astfel, aceasta se prelungeşte fără soluţie de continuitate la infinit, şi suprafaţa e completă.

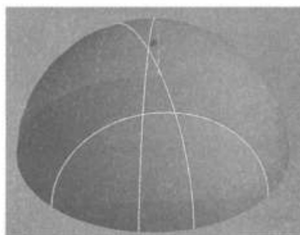


Figura 3.41

În această geometrie, date o dreaptă şi un punct exterior ei, există infinit de multe drepte prin acel punct care sunt paralele cu dreapta de plecare (adică nu o intersectează): într-adevăr, dreapta dată e definită de un plan vertical, deci e suficient să luăm toate planele verticale prin punctul dat care-l intersectează pe cel iniţial în afara sferei unitare.

În plus, suma unghiurilor interne ale unui triunghi geodezic e mai mică decât π, după cum se vede în exemplul din figura 3.41.

Beltrami construieşte astfel primul model pentru geometria hiperbolică, model scufundat în spaţiul obişnuit, dar cu o metrică diferită de cea standard. Merge mai departe, derivând alte două modele echivalente şi chiar generalizând aceste modele ale geometriei hiperbolice la dimensiuni mai mari.

Primul model echivalent se obţine pur şi simplu proiectând (vertical) semisfera şi geodezicele ei pe discul unitar din planul $z=0$; obţine aşa *discul hiperbolic*, reluat apoi de Felix Klein (figura 3.42).

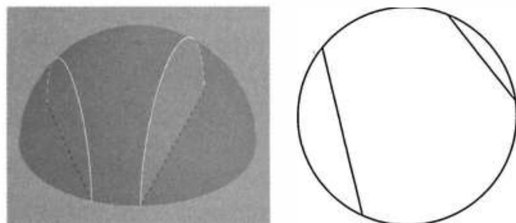


Figura 3.42

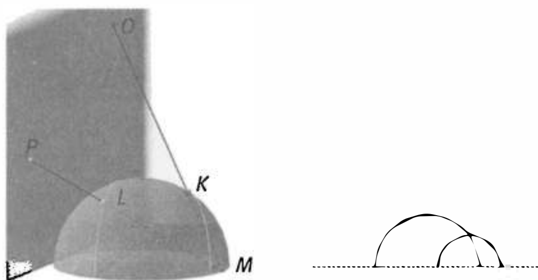


Figura 3.43

În acest caz, ambientul e un disc de rază 1, cu o distanță diferită de cea euclidiană, care face ca lungimea segmentelor să crească cu cât ne îndepărtăm de centru către frontieră. Geodezicele sunt corzi; nefiind posibil să ajungem la frontieră în timp finit, corzile pot fi gândite ca având lungime infinită, deci suprafața e completă.

Se pot apoi proiecta emisfera și geodezicele din punctul (1,0,0) pe planul tangent la sferă în punctul (– 1,0,0) (e o proiecție stereografică a unei jumătăți de sferă), obținând astfel *semiplanul hiperbolic*, reluat apoi de Henri Poincaré (figura 3.43). În acest caz, ambientul e semiplanul superior, adică toate punctele planului cu a doua coordonată pozitivă, cu o distanță diferită de cea euclidiană, una care face ca lungimea segmentelor să crească cu cât ne apropiem de marginea semiplanului. În acest spațiu, geodezicele sunt semidrepte perpendiculare pe frontieră și semicercuri cu centrul pe frontieră; suprafața e completă pentru că, la fel ca înainte, nu e posibil să ajungi la margine în timp finit.

Klein și Poincaré și-au disputat aprig paternitatea acestui model de geometrie hiperbolică; primul a ajuns la epuizare nervoasă și s-a retras din matematica activă. Pe de altă parte, amândoi s-au ferit să citeze contribuția și paternitatea originară a lui Beltrami. Abia într-un articol din 1982, matematicianul american John Milnor reevaluează și scoate la lumină contribuția lui Beltrami*.

* John W. Milnor, *Hyperbolic geometry: The first 150 years, Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) vol. 6, nr. 1 (1982), 9–24. (*N. tr.*)

4. Geometria din zilele noastre

O LECȚIE ACADEMICĂ

În 10 iunie 1854, matematicianul german Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) ține o prelegere la Facultatea de Filozofie din Götingen, care înglobează și Departamentul de Matematică, în prezența întregului corp academic și a profesorului Gauss în calitate de examinator. Prelegerea era intitulată *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei*) și făcea parte din procedura de abilitare necesară pentru obținerea calificării de profesor într-o universitate germană. Procedura e încă în vigoare în Germania și, de câțiva ani încoace, a fost reintrodusă și în Italia. Textul prelegerii a fost publicat postum, în 1867, de matematicianul Richard Dedekind – Riemann murise de tuberculoză la 40 de ani, în 1866, la Verbania, pe malul lacului Maggiore, când se întorcea dintr-o călătorie la Pisa.

Riemann are 28 de ani când își susține abilitarea și redactase deja două disertații fundamentale. Prima e teza de doctorat din 1851, cu titlul *Bazele unei teorii generale a funcțiilor de o variabilă complexă*, scrisă sub îndrumarea lui Gauss. În referatul de acceptare, acesta sublinia „profunzimea și subtilitatea cercetării realizate de o minte matematică creativă, activă și dotată cu o originalitate excepțional de fertilă". A doua este lucrarea care deschidea procedura de abilitare, scrisă în 1835, cu titlul *Despre reprezentarea funcțiilor cu ajutorul seriilor trigonometrice*.

Două lucrări extrem de originale și de inovative care vor determina progresele viitoare ale matematicii până în zilele noastre.

Conform regulamentului, candidatul trebuie să prezinte trei teme pentru prelegere; celor două deja menționate, Riemann le adaugă o temă generică despre elementele de bază ale geometriei. În ciuda unei tradiții bine înrădăcinate, Gauss nu alege primul subiect și trece direct la al treilea – de care, de altfel, se interesa el însuși de mulți ani. Îngrijorat pentru că era nevoit să înceapă o nouă cercetare dificilă, chinuit și de greutățile unei situații materiale precare, Riemann trece printr-o perioadă de epuizare nervoasă. Reușește s-o depășească, și în șapte săptămâni e pregătit să țină expunerea.

O sală plină cu profesori ai Universității din Göttingen, cea mai prestigioasă universitate din Germania acelui timp, având sarcina să examineze capacitățile științifice și didactice ale viitorului cadru didactic – iată, cu siguranță, un public extrem de respectabil. Faptul că nu toți erau profesori de matematică era o complicație în plus. Să explici matematica în lipsa formulelor e ca și cum te-ai duce să joci tenis fără rachetă!

În ciuda acestei situații, prin multe aspecte neobișnuită și dificilă (sau poate tocmai din acest motiv), Riemann a pregătit un text revoluționar și vizionar, unul dintre cele mai importante care s-au scris vreodată în matematică, text care a avut repercusiuni enorme inclusiv în fizică și filozofie. Studiat de generații de cercetători, primii fiind cei din Göttingen, dar apoi, treptat, din toată Europa, a dat naștere unei puternice teorii geometrice numite *geometrie diferențială* sau *geometrie riemanniană*, capabilă să înglobeze multe dintre noutățile științifice contemporane. Printre ele, teoria relativității generale a lui Einstein care, fără lecția inaugurală a lui Riemann, nu ar fi putut fi concepută.

Nu e ușor să prezinți ideile conținute în acest text, care sunt exprimate în germană cu cuvinte folosite pentru prima dată în matematică și care, în secolul următor, au devenit limbajul comun al geometrilor, inclusiv prin traduceri literale în multe limbi. Ne aflăm în fața unuia dintre acele momente cruciale în care ideile devin cuvânt, *logos*, și în cursul acestei deveniri

capătă o valoare de cunoaştere stabilă şi transferabilă. Din toate aceste motive voi încerca, pe cât posibil, să urmez cuvintele lui Riemann, adăugând comentarii şi interpretări care sunt azi universal acceptate; în unele locuri voi reda în paranteză cuvintele germane originale.

Prelegerea începe cu un *Prolog. Planul studiului.*

> După cum se ştie în geometrie, atât noţiunea de spaţiu, cât şi primele noţiuni fundamentale pe care se bazează construcţiile în spaţiu sunt presupuse ca fiind de la sine înţelese. Geometria dă numai definiţii nominale ale lor, dar ceea ce formează caracterul lor esenţial apare sub formă de axiome. Relaţiile dintre aceste ipoteze rămân astfel aproape ascunse şi se poate să nu rezulte clar dacă aceste relaţii sunt necesare şi în ce măsură, nici dacă, *a priori*, ele sunt posibile. Aceste probleme nu au fost lămurite începând de la Euclid şi nici de Legendre – ca să nu-l numesc decât pe cel mai renumit dintre cei care s-au ocupat recent cu dezvoltarea geometriei – nici de matematicienii, nici de filozofii care le-au studiat.*

Două lucruri sunt de reţinut aici: primul e că, în bună măsură, nu se ştie ce sunt axiomele şi postulatele geometriei euclidiene; sunt date, dar rămân în întuneric. Al doilea e că nu e limpede dacă ele sunt sau nu consistente, adică dacă sunt posibile. Riemann decide să nu se aventureze în aprofundarea acestor chestiuni, observând că nici unul dintre matematicienii care l-au precedat, de la Euclid la contemporanul Legendre, nu a ajuns la soluţii convenabile, deci nu aceasta e direcţia corectă în care ar trebui să se îndrepte.

> Cauza acestei stări de lucruri constă desigur în aceea că noţiunea generală de mărime cu mai multe dimensiuni

* B. Riemann, *Ipotezele care stau la baza geometriei*, trad. de E. Gergely, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1963. (*N. tr.*)

> [*mehrfach ausgedehnter Grössen*]*, în care se încadrează și mărimile spațiale, a rămas cu totul necercetată. De aceea, mi-am propus mai întâi să construiesc noțiunea de mărime cu mai multe dimensiuni, cu ajutorul noțiunilor generale de mărime. În acest caz rezultă că o mărime cu mai multe dimensiuni poate să aibă mai multe relații metrice [*eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist*] și că, deci, spațiul formează numai un caz particular de mărime cu trei dimensiuni.**

Așa că Riemann se hotărăște să studieze conceptul de mărime multiplu extinsă pe care, poate, azi l-am putea traduce mai bine ca mărime *multidimensională*. Observă că un obiect multidimensional poate fi măsurat în felurite moduri; spațiul (acela pe care îl considerăm în mod normal, anume spațiul euclidian) fiind doar un caz particular de mărime tridimensională.

> De aici însă decurge ca o consecință necesară că teoremele geometriei nu se pot deduce din noțiunile generale despre mărimi, dar că proprietățile prin care spațiul se deosebește de celelalte mărimi tridimensionale posibile pot fi aflate numai prin experiență. Se pune, prin urmare, problema de a căuta datele cele mai simple din care să se poată deduce relațiile dimensionale [relațiile metrice] ale spațiului, o problemă care prin natura sa nu este complet determinată, deoarece se pot concepe mai multe sisteme de date simple suficiente pentru determinarea relațiilor dimensionale ale spațiului, dar cel mai important pentru scopul urmărit de noi este acela pe care s-a bazat Euclid. Faptele acestea nu sunt necesare, ci au doar certitudine empirică, adică sunt ipoteze. Așadar, se poate cerceta probabilitatea lor – care, de altfel, este foarte

---

* Literal, *mărime multiplu extinsă*. (*N. tr.*)

** B. Riemann, *Ipotezele care stau la baza geometriei*, trad. de E. Gergely, Ed. Tehnică, București, 1963. (*N. tr.*)

> mare în limitele observației – și după aceea se poate decide dacă este posibilă extinderea lor dincolo de limitele observației, atât înspre infinitul mare, cât și înspre infinitul mic.*

Proprietățile ce caracterizează spațiul între toate mărimile tridimensionale nu pot fi determinate decât experimental, crede Riemann. În această nouă perspectivă, axiomele lui Euclid sunt simple ipoteze, foarte probabile în limitele observațiilor cotidiene sau locale, dar care trebuie verificate sau chiar negate experimental prin observații la o scară foarte mare ori foarte mică.

E teoretizat aici un punct de vedere diametral opus celui al lui Kant din *Critica rațiunii pure*, după cum am notat și în capitolul 1, care atribuie spațiului o existență *a priori*, la care deci nu se poate ajunge prin experiență.

Riemann adoptă o poziție ce caracterizează matematica modernă: nu spune că geometria lui Euclid are nevoie de ajustări, nici nu propune așa ceva. Face un pas în spate și se întreabă care e obiectul de studiu al geometriei, indicând ca răspuns conceptul general de mărime, ba chiar, mai precis, pe acela de mărime multidimensională.

Ajuns aici, Riemann cere îngăduința cititorului față de încercarea pe care are de gând s-o facă, observând că acest tip de considerații de natură filozofică și fundațională nu sunt tocmai frecvente. Și, ca o reverență în fața corpului academic prezent, indică drept sursă de inspirație un articol al consilierului aulic (*Herr Geheimer Hofrath*) Carl Friedrich Gauss și studiile filozofului antiidealist Johann Friedrich Herbart, fost profesor al aceleiași facultăți din Göttingen. Continuă deci astfel:

> Se poate vorbi de mărimi numai acolo unde există o noțiune generală care admite mai multe modalități de determinare. După cum între aceste modalități există sau nu o tranziție continuă de la una la alta, ele formează o varietate

---

* Idem. (*N. tr.*)

> [*Mannigfaltigkeit*] continuă sau discretă. Aceste modalități diferite de determinare se numesc în primul caz puncte, iar în al doilea caz elemente ale acestei varietăți.*

Iată-ne, în fine, în fața noului concept cu care va fi refondată geometria, conceptul de *Mannigfaltigkeit*. Cuvântul apare aici pentru prima dată în matematică; azi, tradus în atâtea limbi, e printre cele mai frecvent utilizate în publicațiile matematice. În italiană a fost tradus prin *varietà*, în engleză ca *manifold* și *variety*, în franceză ca *variété*.**

În context nematematic, nu e un cuvânt nou și are bune funcții evocative: semnalez o splendidă poezie a lui Schiller, intitulată chiar *Die Mannigfaltigkeit*.

Riemann nu dă o descriere clară și riguroasă a varietății, schițează doar ideea. A fost nevoie de peste cincizeci de ani și de contribuția a mulți matematicieni pentru a se ajunge la o definiție modernă și larg acceptată; dar și azi noțiunea e mereu reexaminată, în căutarea unui concept încă și mai versatil. Simplificând foarte mult, putem spune că o varietate n-dimensională e o mulțime parametrizată de n numere reale care variază independent unul de altul. Altfel spus, fiecare element, punct, se identifică unic prin n numere $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$; acest n-uplu se numește *coordonatele punctului*.

Planul e un exemplu de varietate bidimensională în care fiecare punct se reprezintă prin două coordonate carteziene. O hartă geografică, deci o reprezentare a sferei pe plan, e o descriere cu două coordonate a punctelor sferei.

Atenție, însă! Nu se afirmă că modul în care se atribuie coordonate punctelor e unic: pot exista mai multe *sisteme de coordonate* pentru aceeași varietate. Să ne gândim la plan: oricărui punct i se asociază două coordonate de îndată ce s-au fixat o origine și două axe ortogonale care trec prin ea. Când se schimbă originea sau axele, se schimbă și coordonatele punctului.

---

* Idem. (*N. tr.*)

** Iar în română prin *varietate*. (*N. tr.*)

Pentru fiecare regiune terestră se pot face mai multe hărți geografice, unele mai extinse, altele mai reduse, dar poate cu rezoluție mai bună.

În plus, s-ar putea să nu ajungă un singur sistem de coordonate pentru a descrie toate punctele unei varietăți; de obicei, un sistem de coordonate descrie bine doar o submulțime, eventual foarte mare (deschisă), a varietății. Spunem, din acest motiv, că un sistem de coordonate e o descriere *locală* a varietății. De exemplu, e imposibil să avem o unică hartă geografică pentru întreaga sferă terestră.

Dacă varietatea e bine definită, apar anumite relații între diferitele sisteme de coordonate, analoage celor care se folosesc când se schimbă harta geografică.

Posibilitatea de a varia sistemul de coordonate se dovedește foarte utilă în rezolvarea multor probleme geometrice care apar pe varietăți. Pe de altă parte, ea constituie o dificultate atunci când se încearcă definirea, cu ajutorul coordonatelor, a unui concept geometric care se vrea *intrinsec* varietății, adică independent de coordonatele alese. Mare parte dintre rezultatele geometriei moderne sunt obținute prin alegerea convenabilă a unor sisteme de coordonate, combinată cu folosirea unor concepte intrinsece.

Riemann sugerează un mod de a construi, sau, măcar, de a imagina, o varietate de dimensiune n plecând de la una de dimensiune $n-1$. Pornind de la un punct, care se mișcă într-o direcție, se obține o curbă, deci o varietate 1-dimensională; regăsim aici una dintre definițiile originare ale curbei – punct în mișcare. Dacă însă s-ar deplasa în două direcții, ortogonale între ele, s-ar obține o suprafață; o suprafață se obține și dacă se mișcă o curbă întreagă într-o direcție transversă. Amintesc că așa am construit suprafețele de rotație, rotind o anumită curbă, sau suprafețele riglate, translatând o dreaptă.

În general, dacă se mișcă o varietate n-dimensională într-o direcție pe care o s-o numim transversă, se obține o varietate $(n+1)$ dimensională; altfel spus, varietatea din urmă poate fi

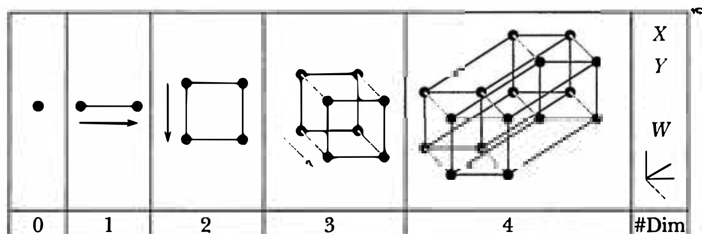


Figura 4.1

gândită ca o *sinteză dintre o variabilitate* n-*dimensională și o variabilitate* 1-*dimensională.*

Figura 4.1 ilustrează construcția unui „cub“ în orice dimensiune; se pleacă de la un punct (dimensiune 0) care e translatat în linie dreaptă într-o anumită direcție, obținând astfel un segment (dimensiune 1). Se continuă, translatând în linie dreaptă figura într-o direcție ortogonală pe cea dintâi, obținând un pătrat; apoi, translatând într-o direcție perpendiculară pe primele două, se obține un cub în spațiu (deja, desenul reprezintă o proiecție plană a cubului), apoi un „hipercub“ 4-dimensional și așa mai departe, se obțin „cuburi“ în orice dimensiune.

Riemann propune câteva exemple de varietăți: primul e destul de naiv și e dat de mulțimea formată de culori. Mulțimea depinde de trei parametri, cele trei culori fundamentale (albastru, roșu și verde); orice altă culoare e dată de o combinație anume a celor trei culori fundamentale.

Exemplul principal e dat de suprafețele descrise de Gauss, varietăți de dimensiune 2. În capitolul al treilea, observasem că o suprafață poate fi descrisă sub *formă parametrică*, drept mulțime a punctelor spațiului ale căror coordonate carteziene $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ sunt date de funcții $x(u,v)$, $y(u,v)$ și $z(u,v)$ care depind de doi parametri continui u și v. Sfera de rază r centrată în origine, de exemplu, e descrisă cu parametrii *latitudine* și *longitudine* de funcțiile $(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (r \sin v \cos u, r \sin v \sin u, r \cos v)$. Am văzut și că există mai multe tipuri de hărți geografice, deci mai multe moduri de a parametriza și de a da coordonate.

Variind parametrii *u* și *v*, parcurgem întreaga suprafață fără să mai ținem seama de spațiul obișnuit în care e scufundată suprafața.

În lucrări ulterioare, Riemann va relua conceptul de varietate pentru a studia probleme noi și complexe. Va propune chiar și un exemplu foarte particular, anume varietatea formată de toate suprafețele: o mulțime de mulțimi! Aceasta se numește *spațiu de moduli* și e probabil cea mai studiată în geometria contemporană. Riemann o descrie cu instrumente inovative, printre care teoria funcțiilor regulate care depind de o variabilă complexă (funcții olomorfe) și-i determină dimensiunea.

Observă, de asemenea, că există varietăți care nu pot fi determinate folosind un număr finit de variabile independente; sunt deci varietăți în care o poziție e specificată de o infinitate de parametri. Ca exemplu de asemenea *varietate infinit dimensională* dă mulțimea funcțiilor dintr-o regiune, ori formele unei figuri solide.

Cu această observație, Riemann demonstrează încă o dată o profundă înțelegere a obiectelor matematice; varietățile de dimensiune infinită sunt extrem de utile în analiză, iar studiul lor prezintă un nivel de complexitate foarte înalt.

Pentru Riemann, o varietate nu e doar *mărime multiplu extinsă*, ci e *pasibilă de diverse relații metrice*. Al doilea capitol al disertației lui Riemann are tocmai titlul „Metrici [Massverhältnisse] posibile într-o varietate n-dimensională în ipoteza că curbele au o lungime independentă de poziție...“*

Pe o varietate, vrem să măsurăm distanța dintre două entități, vrem să calculăm mărimea unei submulțimi care, în funcție de dimensiune, poate fi o lungime, o arie, un volum sau un hipervolum. În acest scop, Riemann introduce conceptul de *metrică pe varietate*, apoi pe acela de curbură, luând în mod explicit ca exemplu construcțiile lui Gauss pentru suprafețe. Azi, o varietate cu o metrică se numește *varietate riemanniană*.

---

* B. Riemann, *Ipotezele care stau la baza geometriei*, trad. de E. Gergely, Ed. Tehnică, București, 1963. (*N. tr.*)

Să urmărim din nou explicațiile originale ale lui Riemann, trecând peste multe detalii tehnice. Riemann observă că, pentru a măsura lungimea unei curbe pe o varietate, o împărțim în porțiuni foarte mici, infinitezimale, calculăm lungimile acestor porțiuni mici, apoi însumăm și obținem lungimea curbei. Lungimea unei porțiuni foarte mici e numită *element de linie* (*Linielement*) și e notată *ds*.

Riemann își propune deci să „găsească o expresie generală pentru *ds* în orice punct, expresie care să conțină coordonatele x_i și variațiile lor infinitezimale dx_i".

În urma unei serii de observații – destul de obscure, de fapt–, Riemann deduce că *ds* trebuie să fie „rădăcina pătrată a unei forme pătratice în variabilele dx_i, pozitivă în orice punct". Altfel spus, afirmă că are loc o relație de felul:

$$ds = \sqrt{g_{11}dx_1^2 + \ldots + g_{ij}dx_i\,dx_j + \ldots + g_{nn}dx_n^2}$$

unde $g_{ij}(x_1,x_2,\ldots x_n)$ sunt funcții simetrice în indicii i, j, care depind în mod regulat de punct, astfel încât cantitatea de sub radical să fie pozitivă (de exemplu, $g_{ij}(x_1,x_2,\ldots x_n) > 0$ pentru orice i, j). Aceasta e definiția unei *metrici riemanniene pe varietate.*

După cum a fost definită, metrica depinde de alegerea coordonatelor. Dacă se alege alt sistem de coordonate, metrica se va exprima cu ajutorul altor funcții. Între cele două sisteme de funcții există relații care se pot obține din cele pentru coordonate. Iată ce spune textual Riemann:

> O expresie de acest fel [metrica] se poate transforma în alta asemănătoare, punând în locul celor *n* variabile independente funcții de *n* variabile independente noi. Dar prin acest procedeu nu orice expresie este transformabilă în alta, deoarece expresia conține $n(n+1)/2$ coeficienți care sunt funcții arbitrare de variabile independente [funcțiile g_{ij}]. Prin introducerea unor noi variabile, se vor satisface însă numai *n* relații și astfel se vor putea egala numai *n* coeficienți cu mărimi date. Atunci ceilalți $n(n-1)/2$ coeficienți sunt determinați

complet prin natura varietăţii ce urmează a se reprezenta şi, prin urmare, pentru determinarea metricii lor sunt necesare numai $n(n-1)/2$ funcţii de poziţie. Varietăţile în care, cum este cazul în plan şi în spaţiu, elementul de linie se poate aduce la forma $ds=\sqrt{dx_1^2+\ldots+dx_i^2+\ldots+dx_n^2}$, formează deci numai un caz special al varietăţilor de care ne ocupăm aici. Ele merită să poarte un nume special şi, ca atare, voi numi aceste varietăţi, în care pătratul elementului de linie poate fi exprimat ca suma pătratelor diferenţialelor independente, *varietăţi plane [eben]*.*

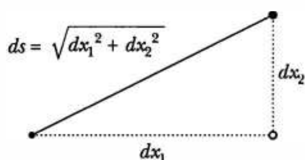


Figura 4.2

Ultima frază spune că, de fapt, construcţia aceasta extinde cazul geometriei planului sau a spaţiului obişnuit. Într-adevăr, în plan, distanţa dintre un punct de coordonate (x_1,x_2) şi unul de coordonate (y_1,y_2) se poate calcula cu teorema lui Pitagora, obţinând $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$. Atunci elementul de linie ds se exprimă în funcţie de variaţiile infinitezimale dx_i prin formula $ds=\sqrt{dx_1^2+dx_2^2}$ (figura 4.2).

La fel şi în spaţiul obişnuit cu n dimensiuni, aplicând repetat teorema lui Pitagora, obţinem formula generală a elementului de linie:

$$ds=\sqrt{dx_1^2+\ldots+dx_i^2+\ldots+dx_n^2}$$

Aici, funcţiile g_{ij} sunt speciale: sunt constante, egale cu 1 dacă $i=j$ şi cu 0 dacă $i\neq j$. Riemann botează acest tip de varietăţi *plate*.**

* Idem. (*N. tr.*)

** E. Gergely traduce adjectivul *eben* prin *plan*, dar termenul folosit acum în română este *plat*: varietăţi plate (în sensul că nu au curbură, vezi mai jos). Echivalentele francez, italian, englez sunt, respectiv: *variété plate*, *varietà piatta*, *flat manifold*. (*N. tr.*)

Riemann se bazează pe cercetările profesorului său Gauss în privința suprafețelor, și recunoaște acest lucru de mai multe ori pe parcursul prelegerii. Gauss nu calculase elementul de linie al unei suprafețe cu teorema lui Pitagora în trei variabile spațiale, ci cu o formulă care depinde de parametrii unei anumite parametrizări $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$:

$$ds = \sqrt{E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2}$$

pentru niște funcții $E(u, v)$, $F(U, v)$, $G(u, v)$, pe care le determină explicit pornind de la parametrizare. De exemplu, $E(u,v) = x_u(u,v)^2 + y_u(u,v)^2 + z_u(u,v)^2$, unde x_u, y_u și z_u sunt derivatele în variabila u.

Formula aceasta poartă numele de *prima formă fundamentală*; e exact definiția metricii pe o varietate bidimensională, adică depinzând de doar doi parametri, u și v, dată de Riemann în general.

Azi, punctul de vedere al lui Riemann (și înainte al lui Gauss) e definit ca *intrinsec* varietății, adică nelegat de vreun mediu care ar conține-o (cum e spațiul obișnuit pentru suprafețe), ci depinzând numai de varietatea însăși.

Metrica permite calculul lungimii oricărei curbe, împărțind-o în porțiuni infinitezimale și însumând, sau, mai corect spus, integrând măsurile tuturor acestor porțiuni. Pe o varietate riemanniană se poate căuta curba de lungime minimă dintre două puncte date, adică geodezica varietății. La fel ca în cazul suprafețelor, problema aceasta variațională se traduce printr-o ecuație diferențială.

În general, soluția acestor ecuații diferențiale există și e unic determinată de valorile inițiale (în cazul geodezicei, acestea sunt punctul de plecare și direcția inițială). Sunt cazuri în care se pot găsi soluții analitice complete, adică ecuații care depind de un parametru și descriu curba geodezică odată cu variația acestuia. În alte cazuri, soluția e doar aproximativă, de exemplu, poate fi formată din curbe liniare pe porțiuni obținute prin metode numerice, cu ajutorul calculatorului.

Citind mai departe textul lui Riemann, ajungem la ceea ce putem defini drept problema fundamentală: care sunt proprietățile matematice care determină o anumită varietate riemanniană; și cum putem distinge varietățile între ele.

Mai precis, Riemann caută o condiție necesară și suficientă pentru ca o varietate riemanniană să fie plată, adică să fie spațiul obișnuit. Altfel spus, dându-se o varietate riemanniană, definită de coordonate $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ și dotată cu metrica

$$ds = \sqrt{g_{11}dx_1^2 + \ldots + g_{ij}dx_i\,dx_j + \ldots + g_{nn}dx_n^2}$$

când admite ea alte coordonate, $(y_1, y_2, \ldots y_n)$, în care metrica ia forma $ds = \sqrt{dy_1^2 + \ldots + dy_i^2 + \ldots + dy_n^2}$?

În dimensiune 2, pentru suprafețe, un prim răspuns e furnizat de teorema *egregium* a lui Gauss: o suprafață e (local izometrică cu) un plan numai dacă curbura sa gaussiană e nulă. Anularea curburii e deci o condiție necesară pentru ca suprafața să fie planul euclidian.

Pentru a rezolva problema în general, Riemann pornește prin a observa că curbura gaussiană e o caracteristică intrinsecă a suprafețelor. Acest lucru e o consecință a formulei lui Gauss care exprimă curbura în funcție de un triunghi geodezic T pe care e presupusă constantă:

$$K = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{A_T}$$

unde α, β și γ sunt unghiurile interioare ale triunghiului, iar A_T e aria lui. Datele din dreapta semnului egal, măsuri de unghiuri și aria unui triunghi geodezic, sunt date intrinsece, depind numai de metrică și nu de spațiul ambient.

Plecând de la aceste considerații, Riemann construiește un *invariant intrinsec* asociat unui punct de pe o varietate n-dimensională: primul embrion al conceptului de *tensor de curbură riemanniană*, care va fi dezvoltat de mulți matematicieni și fizicieni în anii care au urmat.

Iată, pe scurt și simplificând mult, cum procedează Riemann: într-un punct P de pe varietatea riemanniană, consideră două direcții independente care pleacă din P și planul generat de ele. Consideră deci suprafața de pe varietate formată de toate geodezicele care pleacă din punctul P și au direcția conținută în planul descris. Calculează apoi, cu metoda lui Gauss, curbura acestei suprafețe în punctul P; azi o numim *curbură secțională* a varietății de-a lungul suprafeței generate de cele două direcții de plecare. Dar pe o varietate de dimensiune n, prin orice punct trec n direcții independente, una pentru fiecare parametru; iar dintr-o mulțime de n direcții se pot alege două (care, în cazul nostru, vor fi implicit independente) în exact $n(n-1)/2$ moduri. Așadar, construcția lui Riemann asociază fiecărui punct $n(n-1)/2$ curburi secționale independente. Ceea ce îi permite să observe:

> Mărimea aceasta [...] depinde numai de locul și de direcția acestuia [elementului de suprafață]. [...] Valoarea ei devine natural egală cu 0 dacă varietatea reprezentată este plană [...] și ca atare poate fi considerată ca măsură a abaterii de la „planeitate" în acest punct și în această direcție a suprafeței.*

Condiția de a avea curburi secționale nule e deci o condiție necesară pentru platitudine (planeitate).

> Am găsit înainte că, pentru determinarea metricii unei varietăți cu n dimensiuni reprezentabile în forma presupusă sunt necesare $n(n-1)/2$ funcții de poziție. Așadar, dacă se dă curbura în fiecare punct în $n(n-1)/2$ direcții de pe suprafață, se va putea determina de aici metrica suprafeței, cu condiția ca între aceste valori să nu existe relații identice, ceea ce, de fapt, în general nu se întâmplă. Astfel, metrica acestor varietăți [...] poate fi exprimată în mod cu totul independent de alegerea mărimilor variabile. [...] pentru determinarea relațiilor

* B. Riemann, *Ipotezele care stau la baza geometriei*, trad. de E. Gergely, Ed. Tehnică, 1963. (*N. tr.*)

metrice [ale unei varietăţi plate] este suficient să se ştie că în fiecare punct, în $n(n-1)/2$ direcţii de pe suprafaţă, ale căror curburi sunt independente una de alta, acestea sunt nule.*

Condiţia de a avea curburi secţionale nule e deci şi o condiţie suficientă pentru platitudine (planeitate).

Varietăţile în care curbura în fiecare punct este egală cu 0 pot fi considerate ca un caz special al acelor varietăţi a căror curbură e constantă în fiecare punct. Caracterul comun al acestor varietăţi, a căror curbură este constantă, se poate exprima şi prin aceea că figurile se pot mişca în cuprinsul lor fără a se întinde. Căci este evident că figurile nu pot fi supuse la nici o translaţie şi rotaţie în aceste suprafeţe dacă curbura n-ar fi aceeaşi în fiecare punct şi în toate direcţiile. Pe de altă parte însă, metrica varietăţii e complet determinată de curbură. [...] Metrica acestor varietăţi depinde numai de valoarea curburii şi, în ce priveşte expresia analitică [...], se poate da expresia elementului de linie sub forma

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}}\sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_i^2 + \ldots + dx_n^2}$$

dacă se notează valoarea curburii cu α.**

Rândurile de mai sus reprezintă o demonstraţie – corectă, dar nu îndeajuns de detaliată – a următorului rezultat.

Teorema lui Riemann. O varietate n-dimensională e plată dacă şi numai dacă, în orice punct al ei, $n(n-1)/2$ curburi secţionale independente sunt nule. Curburile secţionale sunt intrinsece varietăţii şi nu depind de alegerea parametrilor. Dacă curburile secţionale sunt constante şi egale cu α, atunci reprezentarea analitică a metricii e dată de formula

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}}\sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_i^2 + \ldots + dx_n^2}$$

* Idem. (*N. tr.*)

** Idem. (*N. tr.*)

> În general, curburile secționale (definite convenabil) determină metrica în orice punct.

E poate util să rezumăm cele spuse până aici: spațiul plat, acela cu distanța dată de teorema lui Pitagora, e doar una dintre multele posibilități de varietate riemanniană. Curburile secționale sunt instrumentul cu care noi, locuind în interiorul varietății, putem măsura cât de mult se îndepărtează ea de spațiul plat, deci cât de mult se curbează. Curburile ne permit și să clasificăm varietățile, adică să le împărțim în clase: una dintre aceste clase, pusă în evidență de Riemann, apoi și de alți geometri, e aceea a varietăților cu curbură constantă.

Prelegerea conține anumite afirmații care ar trebui aprofundate: printre acestea, cerința ca „printre aceste valori [ale curburilor secționale] să nu existe relații identice, ceea ce, de fapt, în general nu se întâmplă". Curburile secționale, spunem azi, trebuie să fie calculate pentru suprafețe normalizate convenabil, un procedeu tehnic mai complicat.

Prelegerea de la Göttingen se încheie cu un capitol intitulat „Aplicație la spațiu", în care Riemann discută conexiuni între ideile introduse de el și realitatea descrisă de fizică. Sunt considerații care vor influența major atât dezvoltarea geometriei, cât și a fizicii.

Prezint prima dintre acestea folosind cuvintele lui Alexander Grothendieck din *Récoltes et semailles* (p. 67–68; textul integral poate fi accesat la adresa https://ipfs.io/ipfs/QmaWmdeyPX-4dA8dHVhNN2qRtVLWqKTTVMHgHufZMUJut3F):

> [Riemann] observă că e foarte posibil ca structura cea mai intimă a spațiului să fie „discretă", iar reprezentările „continue" ale spațiului pe care ni le construim noi constituie poate o simplificare (posibil excesivă, în definitiv...) a unei realități mai complexe; că mintea omenească percepe mai ușor „continuul" decât „discontinuul", astfel încât cel dintâi ne folosește ca o „aproximație" pentru a înțelege discontinuul. E aici o observație surprinzător de pătrunzătoare în

gura unui matematician, într-un moment în care modelul euclidian al spațiului fizic încă nu fusese pus în discuție; în sens strict logic, în mod tradițional, mai degrabă discontinuul a servit drept model de abordare tehnică a continuului.

La jumătatea secolului trecut, André Weil și Alexander Grothendieck dezvoltă, în interiorul geometriei algebrice introduse de Descartes, un sector dedicat studiului entităților geometrice discrete care are azi aplicații în multe domenii din informatică, mai ales în securitatea datelor.

Cât privește a doua observație, citez din nou cuvintele lui Riemann:

[...] problema bazei interne a relațiilor metrice ale spațiului. Acestei probleme, care poate fi socotită ca făcând parte din teoria spațiului, i se aplică observația de mai înainte, și anume că, în cazul unei varietăți discrete, principiul relațiilor metrice este conținut deja în noțiunea de varietate, dar în cazul unei varietăți continue, el trebuie să fie împrumutat din altă parte. Așadar, este necesar fie ca realitatea care stă la baza spațiului să formeze o varietate discretă, fie ca baza relațiilor metrice să fie căutată în afară, în forțele de legătură [*bindenen Kräften*] care acționează asupra lor. [...] Dar cu aceasta intrăm în domeniul altei științe, în domeniul fizicii, pe care caracteristicile împrejurărilor de față nu ne permit să-l abordăm.*

Pare să fie aici un preludiu evident al ideilor lui Albert Einstein despre influența maselor și forțelor gravitaționale generate de ele asupra formei spațiului; să-i lăsăm însă pe istoricii științelor să decidă.

Așa se încheie prelegerea; Dedekind o descrie ca pe o capodoperă expozitivă, chiar dacă, cel mai probabil, prea puțini au înțeles-o atunci cu adevărat. Ba chiar povestește că Gauss, complet uluit în fața unor concepte și idei care îi depășiseră cu mult

* Idem. (*N. tr.*)

aşteptările, i-ar fi comunicat colegului fizician Wilhelm Weber, într-o neobişnuită stare de agitaţie „aprecierea enormă pentru profunzimea ideilor prezentate de Riemann“. După ce, pe tot parcursul carierei lui, îşi considerase toţi colegii de nivel mediocru, să asiste la o prelegere în care un tânăr matematician prezintă limpede şi generalizează propriile lui rezultate trebuie să i se fi părut de-a dreptul miraculos.

În 1859, Riemann a fost în sfârşit numit profesor de geometrie la Göttingen; în 1866, trupele prusace invadează oraşul, iar Riemann e constrâns să fugă în Italia. În toamna aceluiaşi an moare de tuberculoză, în apropiere de lacul Maggiore. Când vestea ajunge acasă, menajera din casa Riemann se apucă să facă ordine în birou, aruncându-i notiţele, inclusiv multe lucrări rămase neterminate. Cu siguranţă, multe mari descoperiri ale lui s-au pierdut din pricina ordinei şi a curăţeniei – unele poate ascunse încă în lumea ideilor.

În anii care-au urmat, prelegerea lui Riemann a fost studiată, comentată şi comunicată de mulţi matematicieni din Göttingen, mai ales de Dedekind, Klein, apoi şi de Hermann Weyl.

Eugenio Beltrami îşi scrie memoriul fundamental despre geometriile neeuclidiene, despre care am vorbit în capitolul precedent, în 1868, anul imediat următor publicării prelegerii lui Riemann, şi foloseşte în mod esenţial formula pentru metrica unei varietăţi de dimensiune 3 cu curbură constantă egală cu -1.

DE LA RIEMANN LA RELATIVITATEA GENERALĂ

În 1861, Riemann reia problema caracterizării varietăţilor riemanniene plate, într-o lucrare pe care o prezintă Academiei din Paris, concurând la un premiu pentru studiul transmiterii căldurii; nu câştigă, deoarece juriul găseşte argumentele sale prea puţin clare. În lucrarea lui, Riemann explicitează calculele

necesare pentru a construi un sistem de coordonate cu metrica plată, plecând de la o expresie a metricii în coordonate arbitrare. Calculele acestea conduc la o serie de ecuații diferențiale pentru rezolvarea cărora Riemann deduce condițiile necesare, exprimate prin ceea ce azi numim *tensorul de curbură al lui Riemann*.

Simplificând pe cât se poate, am putea defini un tensor de rangul r pe o varietate ca pe o funcție care, în fiecare punct, asociază unei submulțimi de direcții, zise *vectori* (și covectori), o valoare numerică. În sensul acesta, curbura secțională ar putea fi înțeleasă ca un tensor care asociază fiecăror două direcții independente curbura suprafeței generate de ele. Tensorul trebuie să fie compatibil cu schimbările de coordonate: când schimbăm coordonatele, valoarea tensorului pe aceleași direcții nu se schimbă.

Tensorul de curbură al lui Riemann e un tensor de rangul 4 (acționează pe trei vectori și un covector) care conține toate informațiile obținute din curburile secționale (care, la rândul lor, îl determină). Are loc deci următorul rezultat:

> Teoremă. Fie M o varietate riemanniană. Dacă tensorul de curbură al lui Riemann e nul, atunci varietatea e plată, adică există (local) parametri în care metrica are forma $\sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}$

Reluând o notație folosită în capitolul 3, vom spune că două varietăți riemanniene egale până la o schimbare de coordonate sunt *local izometrice*.

Funcția tensorului de curbură ar fi aceea de a identifica metrica (nu numai pe cea plată!) până la izometrii locale. Ceea ce e adevărat pentru varietăți de dimensiune mai mare sau egală cu 3 dacă mai adăugăm o anume ipoteză, după cum au demonstrat matematicienii Ravindra S. Kulkarni și Shing-Tung Yau. În cazul suprafețelor însă există contraexemple destul de patologice.

Odată definit conceptul de varietate riemanniană, o mulțime cu relații metrice care permit măsurarea obiectelor conținute în

ea, e natural să înceapă dezvoltarea unei teorii pentru determinarea acestor măsuri, adică un *calculus* pe varietăți.

În această întreprindere monumentală s-au aventurat doi matematicieni italieni, Gregorio Ricci-Curbastro și elevul său Tullio Levi-Civita. În 1900, ei au publicat o carte celebră, intitulată *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (Metode de calcul diferențial absolut și aplicațiile lor), care va deveni repede manualul de referință pentru ceea ce, de atunci încoace, s-a numit *calcul diferențial absolut*. În ea, cei doi au elaborat un mod de a deriva funcțiile definite pe varietăți în manieră intrinsecă, introducând ceea ce azi numim *conexiunea Levi-Civita*. Extind apoi această derivare-conexiune la tensori, într-un mod convenabil și foarte comod de manevrat, construind așa-numitul *calcul tensorial*.

Ei redefinesc tensorul de curbură al lui Riemann și alți tensori de curbură, determinați de acesta, dar utili în anumite situații. Printre ei, *tensorul de curbură al lui Ricci* și *tensorul de curbură scalară*, de rangul 2 și, respectiv, 0, obținuți din tensorul lui Riemann (de rangul 4) contractând întâi doi dintre indicii lui, apoi pe cei doi rămași. Trebuie observat că tensorul lui Ricci e complet determinat de curburile secționale, dar, în general, conține mai puțină informație decât ele, deci nu e capabil să determine varietatea până la izometrii.

Cam în același timp, un fizician-matematician german, Hermann Minkowski, asistent al lui Hilbert la Göttingen, apoi profesor al lui Einstein la Zürich, își anunță celebrul său punct de vedere într-o conferință din 21 septembrie 1908, ținută în fața *Societății naturaliștilor și medicilor germani*:

> Conceptele de spațiu și de timp pe care aș vrea să vi le expun provin de pe tărâmul fizicii experimentale și în asta constă forța lor. Sunt radicale. De aici încolo, spațiul înțeles de sine stătător și timpul înțeles de sine stătător sunt sortite să dispară printre umbre și doar un fel de reunire a lor va mai putea avea o realitate independentă.

Conceptul de varietate, introdus cu puţină vreme în urmă de Riemann, se dovedeşte repede perfect pentru interpretarea intuiţiei lui Minkowski: realitatea fizică trebuie interpretată ca o varietate care depinde de patru coordonate (t,x,y,z): prima determină timpul, iar celelalte poziţia din spaţiul obişnuit.

Dar cum să determinăm metrica acestei varietăţi 4-dimensionale, adică acea conexiune dintre spaţiu şi timp cerută de Minkowski?

Răspunsul vine de la principiul fizic pe care se sprijină *teoria relativităţii restrânse*: particulele nu se pot deplasa cu viteză mai mare decât a luminii. Or, principiul acesta e verificat numai dacă relaţiile metrice sunt determinate de o porţiune infinitezimală pentru care pătratul lungimii e dat de formula

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

unde c notează viteza luminii în vid.

Varietatea aceasta, determinată de principii din fizică, se numeşte azi *spaţiu-timp Minkowski*. Nu e o varietate riemanniană, ci e primul exemplu de *varietate semi-riemanniană*: una a cărei metrică e definită cu o formulă de tipul

$$ds^2 = g_{11}dx_i^2 + \ldots + g_{ij}dx_i dx_j + \ldots + g_{nn}dx_n^2$$

adică de o formă pătratică în diferenţialele dx_i care nu mai e neapărat pozitivă, în sensul că matricea simetrică a funcţiilor $g_{ij}(x_1,x_2,\ldots x_n)$ poate avea şi valori proprii negative.

În aceste ipoteze, unele puncte ale varietăţii pot avea pătratul distanţei dintre ele negativ, o noutate *radicală*, contraintuitivă pentru ideea fizică de spaţiu dinainte de Einstein şi de Minkowski.

Calculul tensorial se extinde bine la varietăţi semi-riemanniene. În particular, şi pe acestea putem defini tensorul lui Riemann, la fel şi tensorii derivaţi din el, cum sunt tensorul lui Ricci şi curbura scalară.

Einstein însă n-a fost mulţumit cu această primă teorie şi, zece ani mai târziu, în 1915, a formulat una mai generală, capabilă să înglobeze şi forţa gravitaţiei, extinzând astfel teoria clasică a lui

Newton. În *teoria relativității generale*, o teorie geometrică, de fapt, el propune un model de varietate 4-dimensională, spațio-temporală, dotată cu o metrică g semi-riemanniană de tip Minkowski, compatibilă deci cu teoria restrânsă, determinată ulterior de observații ale fizicii experimentale asupra forței gravitaționale. Aceste observații îl conduc la scrierea uneia dintre cele mai celebre ecuații din istoria gândirii științifice, *ecuația de câmp a lui Einstein*:

$$Ric_g - \frac{1}{2} s_g g = 8\pi T$$

unde Ric_g și s_g notează, respectiv, curbura Ricci și curbura scalară a metricii g, iar T e *tensorul energie impuls* – un tensor de rangul 2 care conține întreaga informație care vine din fizică, în particular din proprietățile materiei. A rezolva această ecuație revine la a găsi metrica, dimpreună cu curburile sale Ricci și scalară.

Einstein pare să urmeze fidel indicațiile lui Riemann după care metrica spațiului trebuie să fie determinată de *forțele constrângătoare care acționează asupra lui.*

E greu să explicăm pe ce se bazează această ecuație: ar fi să aducem argumente din fizică, argumente care nu-și au locul aici. Dar o anume analogie poate fi căutată cu problema mai simplă a brahistocronei, despre care am vorbit în capitolul 2. În acel caz, se puneau laolaltă principii din fizică, legea lui Galilei, cu cerința de minim, exprimată prin condiția lui Snell, și restricțiile geometrice ale geometriei plane. În acest caz, se ajunge la ecuație punând laolaltă principii analoage: cele din fizică, conținute în tensorul T, acela conform căruia lumina se deplasează cu viteza maximă, descris în signatura metricii semi-riemanniene, și principiile de natură mai geometrică reprezentate de prima parte a ecuației, unde intervine curbura.

Nu ne sunt nici azi pe de-a-ntregul limpezi motivațiile care l-au făcut pe Einstein să scrie această ecuație. E sigur că voia să țină seama de teoria relativității restrânse și de teoria clasică newtoniană. A ajuns la forma finală după multe aproximări, corectate și revăzute în aspectele matematice inclusiv pe parcursul unei celebre corespondențe epistolare cu Levi-Civita.

Numeroase teorii geometrice și fizice din a doua jumătate a secolului trecut au confirmat validitatea teoretică a ecuației, punându-i în evidență unicitatea.

Einstein își descrie ecuația ca pe un monument lucrat în *marmură prețioasă* (partea stângă, care privește geometria) și din *lemn de calitate inferioară* (partea dreaptă, care privește materia). Asupra părții acesteia, din lemn, se concentrează fizicienii, ca niște tâmplari care sculptează în el un model al spațiului. Einstein însuși s-a pus pe căutat o formalizare mulțumitoare a tensorului T – chiar și azi, foarte departe de a fi găsită.

Prin notația tensorială, ecuația reunește de fapt zece ecuații diferențiale neliniare cu derivate parțiale. Odată stabilit un tensor energie-impuls convenabil, o soluție determină, prin intermediul curburilor Ricci și scalară, o varietate semi-riemanniană de dimensiune 4 (și, de asemenea, alte obiecte cu interpretare fizică, cum sunt câmpurile de materie).

În general, asemenea ecuații sunt extrem de greu de rezolvat. O mulțime de fizicieni matematicieni caută azi soluții cu metode numerice, folosind calculatorul și programe foarte avansate; *relativitate numerică* se numește azi tâmplăria modernă unde se proiectează posibilele structuri geometrice ale universului nostru.

Una dintre consecințele teoriei relativității generale și a ecuației de câmp e existența *undelor gravitaționale*, fenomen întrevăzut inițial de Poincaré în 1905, apoi teoretizat de Einstein în 1916. Pot fi gândite ca o soluție a ecuației de câmp care admite un comportament ondulator al curburii odată cu variația timpului. Deși era sigur de existența lor, Einstein se îndoia că ele ar putea fi puse în evidență cu vreun experiment (care i-ar fi confirmat o dată în plus teoria). În 2016, o echipă internațională de peste o sută de cercetători anunța lumii că în 2015 observase o undă gravitațională corespunzătoare unei soluții numerice a ecuației lui Einstein cu un T corespunzător fuziunii a două găuri negre aflate la distanță de circa 1 miliard și 300 de milioane de ani-lumină de Pământ. Observațiile au

fost repetate de cel puţin trei ori cu fenomene masive de diferite tipuri. Comunitatea fizicienilor consideră că ele reprezintă o dovadă experimentală suficientă ca să valideze complet teoria care, până în acel moment, era doar o teorie geometrică. În 2017, cei trei coordonatori ai proiectului au primit Premiul Nobel pentru fizică.

UN PROGRAM PENTRU A FACE GEOMETRIE

La câţiva ani după moartea lui Riemann, tânărul matematician Felix Klein îşi obţine abilitarea ca docent al Universităţii din Göttingen, iar în 1872, la numai 23 de ani, devine profesor la Erlangen.

Revoluţia produsă de Riemann în geometrie reclama o nouă organizare a progresului gândirii şi asta pare să vizeze Klein în prelegerea sa inaugurală din 1872, cunoscută azi drept *Erlanger Programm*. Acest program, printre cele mai influente din întreaga gândire ştiinţifică contemporană, se plasează alături de alte manifeste şi programe revoluţionare în vogă în epocă, printre care aş cita *Manifestul Partidului Comunist* (1848) şi *Originea speciilor* (1859).

Klein e un matematician de top şi un om de mare cultură, preocupat de progresul ştiinţific, dar şi de organizarea comunităţii ştiinţifice în forme care sunt şi azi actuale. Printre cele din urmă, înfiinţarea unor reviste de specialitate cu un număr restrâns de *referees* (recenzenţi şi garanţi ştiinţifici), organizarea cercetării în departamente şi studiul modalităţilor didactice şi de popularizare cele mai eficace.

Printre studenţii săi, trebuie menţionaţi Max Planck, Gregorio Ricci-Curbastro şi Gino Fano. Acesta din urmă a tradus în italiană Programul de la Erlangen şi l-a publicat, însoţit de nişte complemente, în revista *Annali di Matematica Pura ed Applicata* de la Florenţa, sub titlul „Consideraţii comparative în jurul unor cercetări geometrice recente".

Să citim această traducere, adăugându-i câteva comentarii:

> Când comparăm conceptul de figură geometrică obținut treptat în acest mod cu noțiunile geometriei uzuale (elementare), suntem conduși să căutăm un principiu general conform căruia s-ar putea organiza ambele metode. [...] Ni s-a părut totuși cu atât mai justificat să publicăm observații comprehensive de acest fel, cu cât geometria care, deși e unică în substanța ei, a fost mult prea mult divizată în cursul rapidei ei dezvoltări într-o serie de discipline aproape distincte, care avansează independent una de cealaltă.

Scopul e definirea unui principiu general sub care să se adune diversele discipline ale geometriei moderne. Conceptul esențial cel mai important între toate cele necesare pentru considerațiile care urmează e acela de grup de transformări ale spațiului.

În matematică, un *grup* e o mulțime dotată cu o operație, adică o lege care asociază oricăror două elemente ale mulțimii un al treilea; în plus, ea trebuie să aibă un element neutru și fiecare element al mulțimii trebuie să aibă un invers: numerele întregi, de exemplu, cu adunarea și cu elementul neutru 0, formează un grup. La fel, numerele reale, cu cele două operații uzuale, adunare și înmulțire; elementul neutru al înmulțirii e 1, iar al adunării e 0 (singurul element care nu are invers față de înmulțire). Conceptul acesta apare la începutul secolului XIX în algebră, în lucrările lui Joseph-Louis Lagrange, Paolo Ruffini, Évariste Galois și Niels Henrik Abel despre rezolvarea ecuațiilor polinomiale de grad mai mare ca 4. De-atunci încoace, a devenit unul dintre instrumentele cele mai folosite și versatile în foarte multe domenii ale cercetării matematice.

Grupul de transformări a fost introdus în geometrie de Sophus Lie; azi, aceste grupuri se numesc *grupuri Lie* și sunt foarte importante în fizica teoretică. În programul său, Klein transferă și decantează mare parte din ideile lui Lie.

O transformare a spațiului și, mai general, a unei varietăți, e o corespondență care asociază fiecărui punct al varietății un

alt punct (şi numai unul) al aceleiaşi varietăţi; se mai cere şi ca fiecare punct al varietăţii să provină prin această transformare din altul, şi ca două puncte distincte să nu fie transformate într-un acelaşi, altfel spus, se cere ca *transformarea să fie biunivocă*. Două transformări se pot compune, dând naştere unei a treia; trebuie observat că ordinea în care se face compunerea e importantă: în general, când se schimbă ordinea, se obţine o altă transformare.

Un *grup de transformări* al unei varietăţi e o mulţime de transformări ale varietăţii, cu operaţia dată de compunere.

Lie observă şi că, sub anumite ipoteze, un grup de transformări are el însuşi o structură de varietate, deci poate fi studiat şi clasificat şi din punct de vedere geometric; dar acest aspect nu se va adapta viziunii lui Klein.

Să dăm un exemplu în cazul celei mai simple varietăţi, planul. O *translaţie* e o transformare care mută fiecare punct într-o direcţie şi la o distanţă fixate. În coordonate, o translaţie se scrie $T(x,y)=(x+a,y+b)$, cu (a,b) fixate. Mulţimea tuturor translaţiilor formează un grup. Alt grup de acest tip e dat de *rotaţiile* în jurul unui punct fix; altul, de *simetriile faţă de o dreaptă fixă*. Mulţimea tuturor translaţiilor, rotaţiilor, a simetriilor dimpreună cu toate compunerile lor formează un grup, anume *grupul izometriilor planului*. Dacă le adăugăm dilatările lungimilor în direcţii radiale faţă de un punct fix, plus toate compunerile posibile, obţinem un grup mai mare, numit *grupul asemănărilor*.

> Acum, există transformări ale spaţiului prin care proprietăţile geometrice ale configuraţiilor spaţiale rămân în întregime neschimbate. Asta deoarece proprietăţile geometrice sunt, prin chiar ideea lor, independente de poziţia ocupată în spaţiu de configuraţia în chestiune, de mărimea ei absolută şi de sensul* în care sunt aranjate părţile ei. Proprietăţile

* Prin „sens" înţelegem acea particularitate a aranjamentului părţilor unei figuri care o distinge de simetrica ei (figura reflectată). Astfel, de exemplu, o elice stângă şi una dreaptă au „sensuri" opuse. (*N. a.*)

unei configurații rămân neschimbate la orice fel de mișcări ale spațiului, la transformări în configurații similare, la transformări în configurații simetrice față de un plan (reflecție), precum și la orice combinație a acestor transformări. Numim totalitatea acestor transformări *grupul principal** de transformări ale spațiului; *proprietățile geometrice nu sunt schimbate de transformările din grupul principal.* Și reciproc, *proprietățile geometrice sunt caracterizate prin aceea că rămân neschimbate la transformările grupului principal.* Pentru că, dacă privim deocamdată spațiul ca imobil etc., ca o varietate rigidă, atunci orice figură are un caracter individual; dintre toate proprietățile pe care le posedă o figură ca individualitate, doar proprietățile geometrice sunt păstrate de transformările grupului principal. Ideea aceasta, formulată aici oarecum imprecis, va fi clarificată în cursul expunerii.

Să abandonăm acum concepția concretă a spațiului, care pentru matematician nu este esențială, și să-l privim doar ca pe o varietate cu *n* dimensiuni; de fapt, cu trei dimensiuni, dacă ținem la ideea obișnuită de punct ca element al spațiului. Prin analogie cu transformările spațiului, vorbim despre transformările varietății; și ele formează grupuri. Dar acum nu mai există, ca în spațiu, un grup distins de celelalte prin semnificația lui; fiecare grup are importanță egală. Astfel, ca generalizare a geometriei, apare următoarea problemă cuprinzătoare:

Date o varietate și un grup de transformări ale ei, să se investigheze configurațiile care aparțin varietății față de acele proprietăți care nu sunt alterate de transformările grupului.

Dacă facem uz de o formulare modernă care, de fapt, e folosită de obicei numai cu referire la un anume grup, al tuturor transformărilor liniare, problema poate fi enunțată astfel:

---

* Faptul că aceste transformări formează un grup rezultă chiar din definiție. (*N. a.*)

Date o varietate și un grup de transformări ale ei; să se dezvolte teoria invarianților față de acest grup.

Aceasta e problema generală, și ea nu conține doar geometria obișnuită, ci și, în particular, teoriile geometrice mai recente pe care ne propunem să le discutăm și diferitele metode de a trata varietățile cu *n* dimensiuni. Trebuie subliniat în mod deosebit faptul că alegerea grupului de transformări care se adaugă este perfect arbitrară și, în consecință, toate metodele de lucru care satisfac condiția noastră generală sunt, în acest sens, de valoare egală.

Recapitulând, Programul de la Erlangen propune următoarele reguli de bază pentru „a face geometrie“:

1. Se fixează o varietate *ambientă*, de exemplu planul, sau spațiul tridimensional, sau sfera...
2. Apoi se alege un grup de transformări al varietății, numite *simetrii*.
3. Geometria (corespunzătoare) e formată din obiectele (submulțimi) sau de proprietățile (propoziții-teoreme) pe care le „conservă“ în acțiunea lor simetriile grupului, adică acelea care rămân *invariante* sub acțiunea simetriilor.

În cazul planului cu grupul de izometrii (translații, rotații și reflecții), dreapta, unghiul, triunghiul sunt obiecte invariante: o dreaptă e transformată de o izometrie tot într-o dreaptă, un triunghi, într-un triunghi. Paralelismul, măsura lungimilor și a ariilor sunt proprietăți *invariante* la izometrii. Acestea sunt obiectele și proprietățile care dau naștere geometriei euclidiene plane.

Dacă introducem și dilatările, creăm o geometrie mai amplă, care conține și teoremele despre asemănare; grupul acesta păstrează paralelismul, dar nu lungimile, nici ariile.

Prima consecință a Programului de la Erlangen e că „geometria“ devine o dată și pentru totdeauna „geometrii“. Fixat un ambient, dată deci o varietate, tipul de geometrie pe care vrem să-l facem depinde de alegerea grupului. Asta permite *clasificarea* geometriilor prin intermediul clasificării grupurilor. Permite

și evidențierea unor analogii sau identități între geometrii diferite, studiind subgrupurile comune, după cum explică Klein în secțiunea „Adăugarea succesivă a unor grupuri de transformări dintre care unul le include pe celelalte. Diferitele tipuri de investigație geometrică și relațiile lor mutuale."

E un principiu pe care îl vom folosi mult în cele ce urmează, așa că îl vom enunța mai general, sub forma următoare. Presupunem date o varietate și un grup de transformări ale sale. Se pune problema de a studia formele (configurațiile) conținute în varietate în relație cu o formă fixată. În acest caz, avem două posibilități: o putem adăuga pe aceasta din urmă sistemului de forme, caz în care vom studia proprietățile sistemului astfel extins față de grupul propus; sau putem să nu extindem sistemul, ci *să limităm transformările* care se pun la baza studiului la acelea care lasă forma respectivă neschimbată (și care constituie în mod necesar un grup conținut în cel dat).

Să ne ocupăm acum de problema inversă, care se poate deja înțelege. Să vedem care sunt proprietățile obiectelor care se conservă la acțiunea unui grup de transformări care îl conține, ca o parte a sa, pe cel *principal*. Fiecare proprietate pe care o vom găsi e o proprietate geometrică specifică a obiectului, dar nu și reciproc. Astfel, dacă înlocuim grupul principal cu altul mai mare, proprietățile geometrice se păstrează numai parțial. Cele care nu se păstrează nu mai apar ca proprietăți specifice obiectului, ci ca fiind ale sistemului care rezultă adăugând acestora o anumită formă specială. Această formă specială (în măsura în care poate fi determinată) e definită de faptul că e fixată numai de transformările din grupul principal.

În această propoziție găsim atât ceea ce e specific noilor domenii ale geometriei pe care trebuie să le discutăm aici, cât și raportul lor cu metoda elementară. Caracteristica lor e tocmai aceea de a pune la baza studiului, în loc de grupul principal, un alt grup de transformări ale spațiului, unul mai extins. Relația lor mutuală e determinată de o propoziție analoagă, cu condiția ca *grupurile lor să fie conținute unul într-altul*.

Următoarea problemă generală apare și în Programul de la Erlangen: fixată o metrică riemanniană, să se găsească toate transformările care lasă neschimbată metrica („forma respectivă“). Mulțimea acestor transformări (care în mod necesar constituie un grup) se numește *grupul izometriilor* varietății.

Grupul izometriilor planului dotat cu distanța euclidiană e tocmai grupul constituit din translații, rotații, reflecții și compunerile lor.

În cazul spațiului euclidian (plat) tridimensional, determinarea grupului izometriilor trece prin câteva teoreme ale lui Euler. În fizică, această problemă se numește *cinematica corpului rigid*.

Dacă restrângem izometriile spațiului numai la acelea care lasă neschimbată sfera, obținem exact grupul de izometrii al sferei, cel studiat de Euler și, mai apoi, de Gauss. Grupul acesta se numește *grupul ortogonal* și e notat $O(3)$; e un grup Lie important și poate fi gândit ca grupul matricelor 3×3 ale căror inverse sunt transpusele lor. Geometria sferică e studiul invarianților sferei față de transformările grupului $O(3)$.

Klein și Poincaré descriu grupul izometriilor suprafețelor hiperbolice, respectiv ale discului și ale semiplanului hiperbolic. Folosind numerele complexe și regula lor de înmulțire, Poincaré arată că aceste grupuri sunt restricții ale unui același grup mai mare, anume *grupul transformărilor liniare fracționare*, ale cărui elemente sunt transformările planului complex în el însuși de forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

cu $ad - bc \neq 0$.

Să nu ne lăsăm înșelați de relativa simplitate a formulelor; e vorba despre numere complexe $z = x + iy$ și de produse între numere complexe. Poincaré arată și că acest grup e, la rândul lui, restricția unui grup care acționează asupra spațiului tridimensional conservând o anumită metrică hiperbolică: astfel, el urmează drumul lui Beltrami, dar în spiritul Programului de la Erlangen.

Utilizarea numerelor complexe în geometrie nu e o noutate: primul care le-a înțeles importanța strategică a fost Riemann, trecând prin studii de electromagnetism, dar le folosiseră deja Euler și Gauss (mai mult sau mai puțin conștient). Folosind numerele complexe și, mai ales, proprietățile funcțiilor regulate de o variabilă complexă, studiate în teza sa de doctorat din 1851, Riemann și apoi Poincaré descoperă una dintre cele mai frumoase teoreme din matematica modernă:

> Teorema de uniformizare. Orice suprafață riemanniană simplu conexă e conformă cu o suprafață cu curbură constantă. Dacă curbura e pozitivă, toate aceste suprafețe sunt conforme cu sfera; dacă e negativă, atunci sunt conforme cu suprafața hiperbolică a lui Beltrami.

Într-un fel, teorema aceasta închide problema existenței și a clasificării geometriilor plane, adică a varietăților riemanniene de dimensiune 2, neeuclidiene: până la transformări conforme, în ipoteza (tehnică) a simplei conexiuni pe care o vom discuta mai încolo, sunt numai două. Unul dintre obiectivele majore ale geometriei secolului XX a fost extinderea acestei teoreme la dimensiuni mai mari.

CUM SĂ PAVEZI SPAȚIUL

Problema *pavajului* unui plan, adică felul în care poate fi acoperit cu unul sau mai multe poligoane (dalele pavajului) repetate la infinit fără suprapuneri, e una foarte veche și strâns legată de studiul izometriilor.

Modelele de pe marii pereți ai palatului Alhambra, din Granada, descriu multe posibilități de pavaj al planului euclidian. Figura 4.3 e o reproducere digitală a unuia dintre acești pereți.

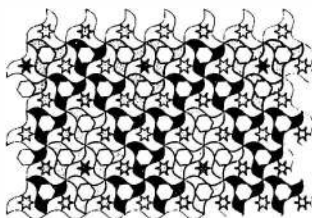


Figura 4.3

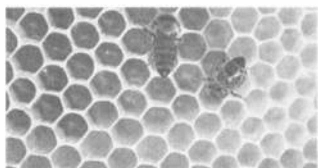


Figura 4.4



Figura 4.5

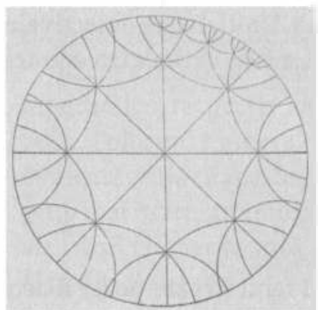


Figura 4.6

Natura oferă o mulţime de exemple de pavaj. Uluitor e acela al fagurilor unui stup de albine, obţinut cu dale hexagonale (figura 4.4).

Pavajele regulate ale planului, cu un singur poligon regulat, sunt de numai trei feluri: cu pătrate, cu triunghiuri echilaterale şi cu hexagoane regulate (fagurii).

Problema se poate pune şi pentru suprafeţe neeuclidiene şi chiar în dimensiune mai mare; pavajele de felul acesta au foarte multe aplicaţii, de exemplu în crearea de materiale cu rezistenţă şi ductilitate mari.

Pavarea unei pardoseli sferice sau hiperbolice are un grad de complexitate mai mic decât în cazul euclidian pentru că, după cum a observat Poincaré, în aceste cazuri, grupul izometriilor e mai mare şi pavajul poate avea mai multă simetrie.

Pe sferă există numai cinci pavaje regulate, corespunzătoare proiecţiilor centrale ale celor cinci poliedre regulate (adică *umflând* poliedrul până devine sferic). Mingea de fotbal, în schimb, e făcută cu un pavaj neregulat, cu pentagoane şi hexagoane (figura 4.5). Pavajele cu poligoane regulate de tipuri diferite se numesc *arhimediene* pentru că au fost clasificate de Arhimede.

Discul hiperbolic poate fi pavat regulat într-o infinitate de moduri; într-o lucrare nepublicată, Gauss a fost unul dintre primii care au propus pavajul din figura 4.6. Acest pavaj a fost

reluat de graficianul olandez Maurits Cornelis Escher care, chiar neavând multe cunoștințe matematice, l-a folosit ca să creeze câteva opere splendide. Figura 4.7 reproduce gravura sa intitulată *Circle Limit III*. Matematicianul britanic Harold Coxeter a studiat în amănunt aceste pavaje și le-a redus la anumite grupuri de izometrii.

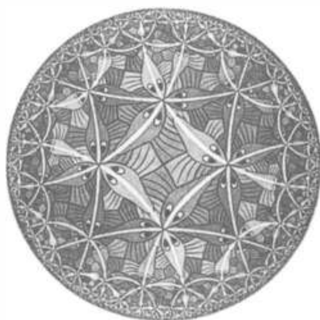


Figura 4.7

REVOLUȚIA PICTORILOR ITALIENI

Renașterea italiană, una dintre perioadele cele mai fecunde pentru cultură, a adus noutăți extraordinare inclusiv în geometrie. Printre acestea, o nouă viziune a spațiului prin intermediul perspectivei, realizare a arhitecților și pictorilor secolului XV, printre care Filippo Brunelleschi, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Paolo Uccello și Leonardo da Vinci.

Descoperirea unei metode pentru a desena direct în perspectivă e atribuită lui Filippo Brunelleschi, dar primul tratat veritabil e *De pictura*, din 1435, redactat de Leon Battista Alberti și dedicat lui Filippo Brunelleschi. Găsim aici *tehnica vălului*, care constă în a pune o bucată de stofă transparentă, cu o țesătură suficient de largă, pe o ramă fixată între pictor și scena care trebuie desenată. Figura 4.8 reproduce o gravură a lui Albrecht Dürer care descrie această tehnică.

Alberti oferă indicații teoretice despre ceea ce el numește *construcție legitimă* și care se bazează în mod esențial pe următoarele două principii:

1. o linie dreaptă în perspectivă rămâne linie dreaptă;
2. dreptele paralele rămân paralele sau converg într-un punct, numit *punct de fugă*.



Figura 4.8

Figura 4.9, din *De pictura*, arată cum se desenează în perspectivă o pardoseală cu dale pătrate. Dreptele neorizontale sunt determinate dispunându-le în mod regulat de-a lungul unei drepte orizontale alese ca bază, apoi făcându-le să conveargă într-un punct de fugă. Toate punctele de fugă stau pe o dreaptă numită *orizont* sau *dreapta de la infinit*. Prin intersecții, se determină punctele celorlalte drepte orizontale și, din aproape în aproape, întreaga pardoseală.

Pictorii din Renaștere consideră un ambient „lărgit", adăugând punctele de fugă: *planul proiectiv*, format din *planul obișnuit căruia i se adaugă o dreaptă*, anume cea care conține toate punctele de fugă (pe care le gândim ca fiind la infinit), cele la care converg dreptele paralele între ele.

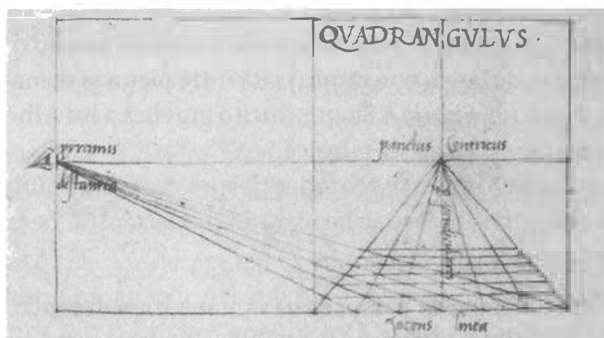


Figura 4.9




Figura 4.10

Puţin după aceea, Piero della Francesca scrie şi el un tratat despre desenul în perspectivă, *De prospectiva pingendi* (*Despre perspectivă în pictură*, 1482), reprodus în şase copii, două dintre ele chiar de mâna lui Piero. În figura 4.10 vedem o pagină din tratat, cu instrucţiuni pentru desenul unui cap uman în perspectivă şi cu *Cetatea ideală*.

În 1497, călugărul matematician Luca Pacioli scrie celebra sa carte *De divina proportione* (*Despre proporţia divină*), în care reproduce toate teoriile descrise de Piero, fără să-l citeze măcar o singură dată. În 1509, Pacioli se hotărăşte să-şi tipărească volumul cu tehnica cea nouă a lui Gutenberg şi, pentru ilustraţii, cere ajutor prietenului său Leonardo da Vinci. Se zice că acesta din urmă a ezitat, nevăzând de ce ar trebui să refacă tot ce era deja în cartea lui Piero.

O editură bună (Paganino Paganini, din Veneţia) care foloseşte un sistem nou de imprimare în multe copii, şi un ilustrator excelent asigură curând succesul cărţii, furând practic paternitatea originalei *De prospectiva* care e aproape uitată.

Se pare că fra' Pacioli ar fi fost misteriosul matematician italian care i-a dezvăluit lui Dürer, şi deci concurenţei germane, secretele perspectivei. La rândul său, Dürer redactează un text cu titlul *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt**, considerat prima carte ştiinţifică în limba germană. Prefaţa a fost scrisă de Erasmus din Rotterdam, iar în text Dürer

* *Instrucţiuni pentru a măsura cu rigla şi compasul.* (*N. tr.*)

își revendică sieși domeniul, afirmând că va explica mai bine decât niște oarecare „autori italieni de tratate care vorbesc despre lucruri pe care nu le stăpânesc bine".

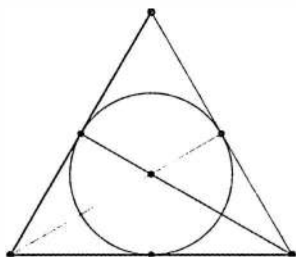
Ideile artiștilor italieni sunt încorporate într-o teorie matematică consistentă abia după mulți ani, într-o carte din 1639 a lui Girard Desargues. Matematicianul francez rezumă în câteva observații tot ce e necesar pentru a defini un plan proiectiv – acestea se numesc azi *axiomele lui Desargues*:

1. două puncte determină o dreaptă și numai una singură;
2. două drepte determină un punct și numai unul singur;

Să observăm că, așa cum indicase și Riemann, spațiile folosite în geometrie pot fi și discrete, adică formate dintr-un număr finit de puncte. În cazul discret, celor două axiome ale lui Desargues trebuie să li se adauge că orice dreaptă conține cel puțin trei puncte și că planul conține cel puțin trei puncte necoliniare.

Figura 4.11 conține un model ciudat de *plan proiectiv discret* format din numai șapte puncte și șapte drepte (una dintre ele desenată în formă de cerc). A fost inventat de Gino Fano, așa că e numit *planul lui Fano*, și reprezintă un model al axiomelor lui Desargues cu numărul minim de puncte și drepte.

Definiția planului proiectiv se extinde la dimensiuni superioare: spațiul proiectiv tridimensional constă în spațiul obișnuit căruia i se adaugă un plan format din toate punctele de la infinit. Urcând în dimensiune patru și mai departe, obținem *spațiul proiectiv de dimensiune n* adăugând spațiului euclidian al n-uplelor un hiperplan de dimensiune $(n-1)$ la infinit.


Figura 4.11

Ideea e de a ține cont de comportarea obiectelor din spațiu la infinit, iar pentru asta trebuie să „organizăm" infinitul într-un hiperplan care poate fi explorat atunci când e nevoie.

Definiția riguroasă implică un proces de abstractizare care depășește

scopurile acestei cărţi. Dar definiţia a fost dezvoltată de Klein şi de alţi matematicieni, dotând spaţiul proiectiv cu o structură de varietate, adică cu coordonate locale în jurul fiecărui punct – punctele care nu se află la infinit au coordonatele euclidiene obişnuite, dar pentru hiperplanul de la infinit se construieşte un alt sistem de coordonate, compatibil cu cel dinainte.

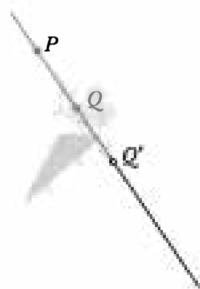


Figura 4.12

Pe spaţiul proiectiv acţionează în mod natural un grup de transformări numite *transformări proiective* sau *proiectivităţi.* Definiţia e tehnică, aici vom da numai o idee geometrică pentru cazul planului proiectiv. Să luăm două copii ale aceluiaşi plan şi să le privim ca plane paralele în spaţiu, situate la o anumită depărtare unul de celălalt; fixăm apoi un punct P din spaţiu în afara amândurora. Fiecărui punct Q al unuia dintre plane îi asociem un punct Q' pe celălalt plan, obţinut ca intersecţie a dreptei care trece prin P şi Q, aşa cum se vede în figura 4.12. Într-un cuvânt, *proiectăm* Q din P în Q' pe celălalt plan. Aparent, transformarea aceasta nu e definită în unele puncte, de exemplu pe dreapta de intersecţie dintre primul plan cu planul paralel cu al doilea şi care trece prin P. De fapt, transformarea e bine definită în toate punctele cu excepţia lui P, cu condiţia ca planele şi spaţiul însuşi să fie considerate proiective, adică să li se adauge punctele lor de la infinit; în acest context, mai potrivit pentru ideile pe care le expunem, transformarea se numeşte *perspectivă (sau proiecţie) a planului* în el însuşi.

Compunerea a două proiectivităţi (din puncte diferite) nu e însă întotdeauna o proiectivitate. Primul care a observat această proprietate a fost Leonardo da Vinci care, în *Codex Atlanticus*, a desenat prima *anamorfoză*, un desen care, privit din puncte diferite, reprezintă figuri diferite. Anamorfoza provine tocmai din compunerea unor perspective diferite; tabloul cel mai cunoscut

realizat cu această tehnică e *Ambasadorii* lui Hans Holbein cel Tânăr (1533).

Grupul transformărilor proiective ale planului e acela care conține toate proiectivitățile și toate compunerile lor. Să observăm că se află în acest grup și toate translațiile, rotațiile, reflecțiile și simetriile. În dimensiuni superioare, grupul proiectivităților se definește similar.

Geometria proiectivă e studiul obiectelor și proprietăților spațiului proiectiv care sunt invariante la grupul transformărilor proiective. Dreptele, planele și hiperplanele sunt obiecte ale geometriei proiective. Iată și un exemplu de teoremă:

> Teorema lui Desargues. Dacă două triunghiuri dintr-un plan sunt în perspectivă față de un punct, atunci dreptele generate de laturile lor corespondente se intersectează în trei puncte coliniare.

Figura 4.13, care ilustrează teorema cu un exemplu, ne furnizează și o demonstrație simplă, folosind o idee pe care unii o atribuie matematicianului italian Luigi Cremona.

Să ne imaginăm întreaga configurație ca fiind proiecția uneia din spațiu – altfel spus, să „ridicăm" configurația în spațiu, ridicând din plan în spațiu una dintre cele trei drepte pe care stau vârfurile triunghiurilor, lăsând-o însă în continuare să treacă prin intersecția celorlalte două. Cele două triunghiuri devin acum triunghiuri în spațiu și fiecare dintre ele determină câte un plan; aceste două plane se intersectează după o dreaptă pe care vor sta, în mod necesar, punctele de intersecție ale dreptelor care prelungesc laturile corespunzătoare ale triunghiurilor. Acum reproiectăm totul în planul inițial, iar teorema e demonstrată.

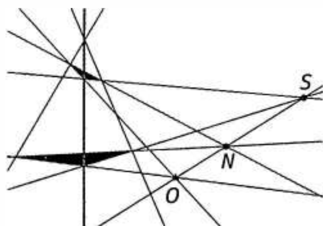


Figura 4.13

Teorema lui Desargues reprezintă o piatră de hotar în studiul geometriei proiective și are nenumărate aplicații. E, de exemplu,

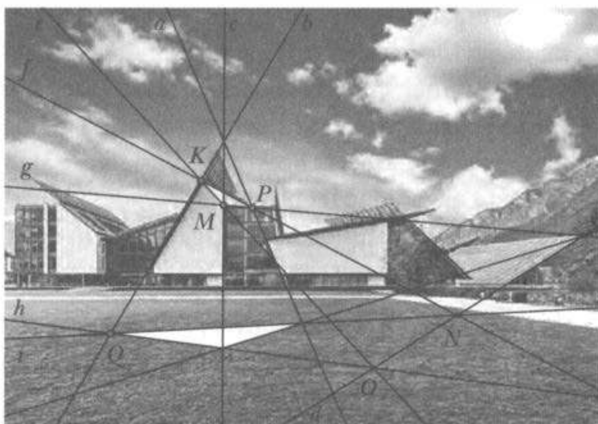


Figura 4.14

foarte folosită în imaginea pe calculator (*artificial vision*) sau în recunoașterea imaginilor (*computer vision*): e un instrument util pentru reconstrucția unei forme spațiale dintr-un obiect fotografiat.

În figura 4.14 m-am amuzat „căutând" teorema lui Desargues în arhitectura Muzeului Științelor din Trento, proiectat de Renzo Piano, arhitect italian cu puternice rădăcini culturale în geometria proiectivă.

GEOMETRIA ALGEBRICĂ PROIECTIVĂ

Spațiul proiectiv n-dimensional e ambientul ideal pentru a scufunda și studia o clasă importantă de varietăți – cele algebrice.

În spirit cartezian, să definim o *varietate algebrică proiectivă* ca o submulțime a spațiului proiectiv care, în orice sistem de coordonate locale $(x_1, x_2, \dots x_n)$, e dată de puncte ale căror coordonate satisfac un anumit număr de ecuații algebrice, adică polinomiale. Sunt exact varietățile descrise de Descartes, curbe, suprafețe etc., dar cu punctele de la infinit adăugate.

O varietate algebrică poate avea puncte singulare; dacă le eliminăm, ea devine o varietate în sensul lui Riemann.

Dacă aplicăm unei varietăți algebrice o transformare proiectivă, obținem o altă varietate algebrică, definită tot ca locul zerourilor unor polinoame; în acest sens, varietățile algebrice sunt un concept al geometriei proiective.

În spiritul Programului de la Erlangen, putem considera următorul *program de clasificare*:

1. Două varietăți algebrice se numesc *proiectiv echivalente* dacă există o proiectivitate care le transformă una într-alta.
2. Punând laolaltă varietățile echivalente între ele, *câte clase* obținem?
3. Între varietățile unei clase, există vreuna privilegiată, un *model* al tuturor celorlalte din clasă?
4. Se poate asocia unei varietăți vreun număr sau vreo proprietate care să fie *invariant (invariantă) la proiectivități* și care să spună cărei clase aparține respectiva varietate?

Descartes și Fermat au demonstrat că toate curbele algebrice de gradul 2 sunt echivalente prin izometrii ale planului cu secțiuni conice, curbe care se obțin intersectând un con cu un plan. Pot fi parabole, hiperbole, elipse și, dacă planul trece prin vârful conului, două drepte (cazul degenerat).

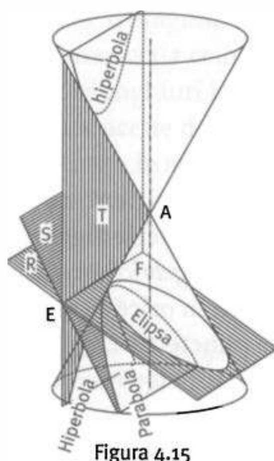


Figura 4.15

Cu ajutorul figurii 4.15 (propusă deja în capitolul 2), putem demonstra că oricare două conice nedegenerate sunt proiectiv echivalente: într-adevăr, una e proiecția celeilalte din vârful conului, de pe un plan pe altul.

Toate curbele algebrice plane de gradul 2 nedegenerate sunt deci proiectiv echivalente.

Newton demonstrează un rezultat asemănător pentru curbele algebrice nesingulare de gradul 3. Ca să-l formulăm în limbaj modern, trebuie să lucrăm peste corpul numerelor complexe.

> Teoremă. Orice cubică plană nesingulară e proiectiv echivalentă cu o cubică ale cărei puncte sunt descrise de coordonatele complexe (z, w) care satisfac ecuația algebrică
> $w^2 = z(z-1)(z-c)$
> unde c e un număr complex. Curbele corespunzătoare unor numere c diferite sunt neechivalente.

Complexitatea problemei crește odată cu gradul curbei, programul devine dificil de manevrat. Iar dacă ne uităm la varietăți de dimensiune mai mare decât 1, programul – în termenii în care l-am formulat – devine irealizabil.

Ce e de făcut? O posibilitate ar fi să lărgim grupul transformărilor, reducând astfel numărul claselor și al invarianților. Se introduc în acest scop conceptele de *aplicație biregulată* și de *transformare birațională* între două varietăți algebrice proiective. Primele sunt transformări descrise de ecuații polinomiale între coordonate. Celelalte sunt definite în același mod, de polinoame, dar nu pe toată varietatea, ci doar pe o submulțime densă (în limbaj tehnic, se spune că sunt definite pe un deschis Zariski sau în punctele generice). Motivul geometric pentru a nu determina aceste transformări (biraționale) în anumite puncte e că exact asta se întâmplă cu proiecțiile, care nu sunt definite în punctele din care se proiectează.

Odată cu înlocuirea grupului proiectivităților cu acela al transformărilor biregulate sau biraționale, intrăm în domeniul *geometriei algebrice biregulate sau biraționale*, unul dintre cele mai fructuoase din cercetarea contemporană.

Pionierii teoriei au fost geometri italieni de la sfârșitul secolului XIX și începutul secolului XX. Printre ei: Veronese, Cremona, Castelnuovo, Enriques, Segre, Fano. Apoi, în prima jumătate a secolului trecut, geometria algebrică birațională a

fost refondată prin lucrările școlilor germană și franceză: definițiile și teoremele școlii italiene au fost reformulate în manieră mai algebrică, argumente care înainte se sprijineau mult pe intuiția geometrică (sau erau chiar greșite), devenind astfel mai convingătoare. Dezvoltarea tehnicilor algebrice în acest domeniu atinge apogeul în jurul lui 1950, odată cu teoria singularităților și cu teoria schemelor, aceasta din urmă fiind opera lui Alexander Grothendieck, matematician francez care ne-a părăsit în 2014, considerat de unii drept cel mai mare matematician al secolului XX.

După al Doilea Război Mondial, intră în scenă și școlile rusă și americană care rivalizează într-o atmosferă de război rece.

Pentru avansul geometriei algebrice în a doua jumătate a secolului XX stă mărturie și numărul de Medalii Fields acordate cercetătorilor din domensiu: K. Kodaira (1954), A. Grothendieck (1966) – care, pentru a protesta împotriva acțiunii militare sovietice în Europa de Est, nu a mers la Moscova să-și ridice medalia –, H. Hironaka (1970), D. Mumford (1974), S. Mori (1990), M. Kontsevich (1998), C. Birkar (2018); lor trebuie să le adăugăm pe acelea acordate unor matematicieni care s-au ocupat și de geometrie algebrică: J.-P. Serre (1954, la doar 28 ani), M. Atiyah (1966), E. Bombieri (1974), P. Deligne, S.-T. Yau (1982), G. Faltings (1986).

O observație preliminară ne va ajuta să ne facem o idee despre cât de departe s-a ajuns cu acest program de clasificare. Varietățile algebrice sunt definite ca locuri ale zerourilor de polinoame; e bine deci să lucrăm peste corpuri în care aceste polinoame au rădăcini. Așa cum am spus deja, mulțimea bună e cea a numerelor complexe, un corp care conține și extinde numerele reale și e algebric închis, adică conține toate rădăcinile unui polinom. Cum orice număr complex e de forma $x + iy$, cu x și y numere reale, o varietate parametrizată de n numere complexe e parametrizată de $2n$ numere reale: trecerea la numere complexe dublează dimensiunea.

O curbă complexă e deci o suprafață reală. Dar în acest caz e adevărată și reciproca: Gauss, Riemann, Beltrami descoperă

că fiecare suprafață (varietate riemanniană de dimensiune 2, orientată) poate fi gândită ca varietate algebrică complexă de dimensiune 1; de aceea, azi, curbele algebrice complexe se numesc suprafețe riemanniene.

Teorema de uniformizare enunțată într-un paragraf precedent se poate reciti ca un rezultat de clasificare a curbelor algebrice proiective în trei clase:

> Teoremă. Orice curbă algebrică proiectivă e biregulat echivalentă cu una dintre următoarele:
> a) spațiul proiectiv complex de dimensiune 1 (sfera);
> b) o cubică plană (descrisă de Newton);
> c) o curbă obținută plecând de la suprafața hiperbolică a lui Beltrami cu identificarea unor puncte (un cât finit).

Curbele din clasa *a* se numesc *raționale*, cele din *b*, eliptice, iar cele din *c* se numesc *hiperbolice* sau *de tip general*.

La cumpăna secolelor XIX și XX, școala italiană atacă și rezolvă problema clasificării suprafețelor algebrice proiective complexe. Teoria e descrisă într-o operă fundamentală a lui Federigo Enriques, anume *Suprafețele algebrice*, editată postum, în 1949.*

Opera aceasta trasează drumul dezvoltării ulterioare a geometriei algebrice. Oskar Zariski, matematician rus format la Roma cu Enriques, Castenuovo și Severi, emigrează în 1927 în Statele Unite, scrie cartea *Suprafețe algebrice*** și pune bazele școlii americane de geometrie algebrică, printre ale cărei obiective e și acela de a algebriza mai mult teoria. În paralel, cu câțiva ani mai târziu, școala rusă studiază cartea lui Enriques în seminarul de la Moscova al lui Igor Șafarevici, părintele școlii ruse moderne de geometrie algebrică. În cartea *Bazele geometriei algebrice****,

---

* *Le Superficie Algebriche*. Nicola Zanichelli ed., Bologna, 1949. xv+464 p. (*N. tr.*)

** *Algebraic surfaces*, Springer Verlag, 1935. (*N. tr.*)

*** Ed. Științifică și enciclopedică, București, 1976. (*N. tr.*)

expunând și discutând rezultatele italienilor, Șafarevici prefigurează direcția geometriei biraționale a școlii sale.

Clasificarea suprafețelor e de natură birațională și se articulează, la rândul ei, în trei clase. Abordarea italiană e inductivă, studiind curbele de pe suprafețe și „ridicând“ informația de la curbe la suprafețe. Motiv pentru care se introduc conceptele de *divizor* și de *divizor canonic*: un divizor e o submulțime a varietății considerate care e, la rândul ei, o varietate cu o dimensiune mai puțin. Divizorul canonic e unul care descrie intrinsec varietatea, conținând, de exemplu, multe informații privind curbura.

În 1980, Shigefumi Mori, matematician din școala din Kyoto, inspirându-se din ideile lui Enriques și ale succesorilor lui, structurează în termeni moderni programul pentru clasificarea varietăților algebrice proiective. *Programul modelelor minimale* (MMP) sau *Programul Mori* constă într-o serie de reguli și acțiuni care ar putea fi schițate cam așa:

1. Definirea *modelului minimal* al unei varietăți: din punct de vedere geometric, e o varietate de aceeași dimensiune cu cea dată, obținută din aceasta în urma unor proiecții și transformări biraționale și care nu mai poate fi proiectată fără a suferi schimbări care-i alterează substanțial geometria. Din punct de vedere algebric, modelele minimale sunt caracterizate de nenegativitatea divizorului canonic.
2. Definirea unei proceduri prin care se poate decide dacă o varietate algebrică proiectivă admite un model minimal. În caz contrar, să se dea o descriere precisă a varietății.
3. Clasificarea varietăților care admit modele minimale în clase determinate de alegerea modelului. Descrierea modelelor minimale și găsirea de invarianți numerici biraționali care caracterizează diversele clase.
4. Descrierea transformărilor biraționale care, aplicate varietăților dintr-o clasă, produc un model minimal corespunzător clasei.

În 1960, matematicianul japonez Heisure Hironaka, profesor în Statele Unite, demonstrează că orice varietate algebrică proiectivă complexă e birațional echivalentă cu una fără puncte singulare; pentru acest rezultat, primește, după câțiva ani, Medalia Fields. Demonstrat în cazul suprafețelor de Pasquale del Pezzo, matematician italian de la începutul secolului XX, rezultatul acesta fundamental al lui Hironaka ne permite să ne limităm la cazul varietăților netede sau cu singularități foarte ușor de controlat.

Cât privește punctul 2, Enriques demonstrase că suprafețele care nu admit modele minimale sunt *suprafețe riglate*, adică acoperite cu curbe raționale (definiția e mai generală decât cea pe care am dat-o în capitolul 3). Acestea includ *suprafețele raționale*, adică cele biraționale cu spațiul proiectiv de dimensiune 2. Castelnuovo și Enriques au construit și invarianți numerici, numiți *plurigenuri* și *iregularități*, care determină când e o suprafață birațională cu una riglată sau rațională; acestea sunt, probabil, rezultatele cele mai frumoase și mai profunde ale școlii italiene.

În dimensiune 3, Mori demonstrează că varietățile *care nu sunt uniriglate*, care nu sunt acoperite de curbe raționale, admit model minimal; în acest scop, introduce un nou tip de transformare birațională, foarte eficace, pe care o numește *flip*.

Pentru varietățile uniriglate, Mori propune o catalogare bazată pe varietăți de bază (cum sunt atomii pentru elementele chimice), studiate de mai bine de o sută de ani de Fano și de aceea numite *varietăți Fano*. Pentru aceste descoperiri, Mori primește Medalia Fields în 1990.

Sunt mulți matematicieni care, în ultimii treizeci de ani, au lucrat la demonstrarea existenței modelelor minimale pentru varietăți care nu sunt uniriglate, în dimensiune mai mare. A reușit, în 2010, o echipă internațională formată din Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher Hacon și James McKernan, într-un articol publicat în *Journal of the American Mathematical Society*.

Pentru acesta şi pentru alte rezultate inerente Programului modelelor minimale, Hacon, de naţionalitate britanică, italiană şi americană, şi McKernan, englez, au câştigat, în 2018, Breakthrough Prize. Acesta, în valoare de 3 milioane de dolari, cunoscut ca Oscarul descoperirilor ştiinţifice, e promovat de o instituţie sponsorizată, între alţii, de Mark Zuckerberg, domnul Facebook. În declaraţia iniţială, institutul scrie: „Cunoaşterea e cea mai mare resursă a umanităţii. Ne defineşte natura şi ne proiectează viitorul. Corpul cunoaşterii s-a constituit de-a lungul secolelor; dar şi o singură minte e capabilă să-l extindă enorm."

În august 2018, Birkar, kurd de origine, refugiat politic şi cetăţean britanic, primeşte Medalia Fields cu următoarea motivaţie: „Pentru demonstrarea existenţei doar a unui număr finit de familii de varietăţi Fano şi pentru contribuţii la realizarea Programului modelelor minimale." Programul de protecţie a refugiaţilor politici în Marea Britaniei impune subiectului schimbarea numelui: Caucher Birkar, care în kurdă înseamnă „matematician rătăcitor", nu e adevăratul lui nume.

Punctele 3 şi 4 ale Programului lui Mori sunt încă în bună măsură neexplorate. S-a avansat mult în cazul suprafeţelor, plecând de la unele construcţii extraordinare de modele minimale datorate lui Enriques (suprafeţe Enriques şi suprafeţe de tip general).

Iată cum prezintă Castelnuovo, într-o scriere din 1928, lucrările despre suprafeţele algebrice elaborate împreună cu Enriques:

> [...] ca să ne găsim calea în bezna în care ne aflam, am fost nevoiţi să ghicim anumite proprietăţi care trebuiau să aibă loc, cu modificări oportune, pentru suprafeţele (regulate şi neregulate) din ambele categorii; puneam la încercare apoi aceste proprietăţi construind noi modele. Dacă treceau testul, atunci le căutam (era ultima fază) justificarea logică. Procedând astfel, cam ca în ştiinţele experimentale, am reuşit să stabilim unele caractere distinctive între cele două familii de suprafeţe.

În fraza finală a cărţii sale, Enriques subliniază dificultatea de care s-au lovit în clasificare:

> „curbele algebrice sunt lucrarea lui Dumnezeu, suprafeţele, a diavolului".

Mari matematicieni din întreaga lume s-au aventurat în studiul modelelor de suprafeţe algebrice. Francezul André Weil a numit nişte suprafeţe descoperite în cursul cercetărilor sale cu sigla K3, pentru a apropia realizarea sa de contemporana cucerire a vârfului K2 din Caşmir.

Kodaira, Mumford şi Bombieri au extins studiul suprafeţelor la alte corpuri de numere şi au construit multe modele; panoplia suprafeţelor e azi foarte amplă şi, fără nici un dubiu, fascinantă.

Explorarea lumii varietăţilor algebrice de dimensiune mai mare ca 2 e încă la început; în ultimii douăzeci de ani au fost studiate modele minimale de mare frumuseţe care şi-au găsit aplicaţii imediate în fizică. Printre acestea, *varietăţile Calabi-Yau*, varietăţi algebrice de dimensiune complexă 3 cu divizor canonic nul, condiţie algebrică de platitudine care le face analoagele curbelor eliptice şi suprafeţelor K3.

Figura 4.16 reprezintă, într-o proiecţie pe plan, varietatea Calabi-Yau obţinută ca loc al zerourilor unui polinom de gradul 5 în patru variabile complexe.

Varietăţile Calabi-Yau au dimensiune reală 6; unite cu spaţiul Minkowski 4-dimensional, formează o varietate de dimensiune 10. După părerea multor fizicieni, acest tip de varietate 10-dimensională ar putea reprezenta teoria a tot ce există (*theory of everything*) despre care e vorba în filmul omonim despre Stephen Hawking. Aceasta e scopul final al unui program care, prin intermediul a puţine ecuaţii, încearcă să interpreteze în mod unitar toate forţele care se manifestă în

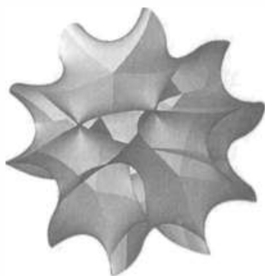


Figura 4.16

fizică.* Problema e tot cea indicată de Riemann: trebuie determinată convenabil varietatea (de tip Calabi-Yau) ale cărei *relații metrice* derivă din *forțele constrângătoare care acționează asupra ei.*

DE LA PROGRAMUL DE LA ERLANGEN LA PARTICULA LUI DUMNEZEU

În 1905, Poincaré observă că, într-o varietate 4-dimensională, forma pătratică $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ e conservată de transformările de tipul:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

Aceste transformări fuseseră descrise cu doar un an înainte de fizicianul Hendrik Lorentz care, la rândul său, observase că ele nu modifică ecuațiile care definesc câmpul electromagnetic – ecuațiile de câmp ale lui Maxwell. Poincaré propune ca grupul generat de aceste transformări să fie numit *grupul transformărilor Lorentz.*

În optica Programului de la Erlangen, relativitatea specială poate fi privită drept studiul obiectelor și al proprietăților invariante ale unei varietăți 4-dimensionale pe care acționează grupul lui Lorentz. Abordarea aceasta – a lui Poincaré – diferă de cea a lui Einstein din același an. În orice caz, Poincaré a fost primul care a enunțat, în 1904, faimosul *principiu al relativității*, conform căruia legile fizicii sunt aceleași (invariante) și pentru un observator fix, și pentru un observator care se mișcă rectiliniu și uniform. Ba chiar se povestește că, la început, Einstein voise să-și numească teoria relativității speciale tocmai teoria invarianților și că Planck i-ar fi sugerat termenul norocos de relativitate.

---

* Varietățile Calabi-Yau joacă un rol central în teoria corzilor (*string theory*) din fizică. Pentru detalii despre teoria corzilor, vezi Brian Greene, *Universul elegant* (Ed. Humanitas, București, 2015). (*N. tr.*)

Pare deci că introducerea în fizică a studiului invarianților anumitor transformări trebuie atribuită lui Poincaré. Dar mulți fizicieni, printre care laureatul Nobel Eugene Wigner, au învățat acest program din lucrările lui Emmy Noether (1882–1935). Fiica unui matematician german, Max Noether, Emmy, devine repede un exponent de marcă al școlii germane de algebră. În 1915, Klein și Hilbert o invită la Göttingen ca să le explice teoria algebrică a invarianților pe care o dezvoltase. Din pricina legilor rasiale, Noether se mută în Statele Unite, ajutată și de Einstein, care o consideră matematiciana cea mai importantă din istorie.

Noether demonstrează o teoremă (care acum îi poartă numele) în care stabilește existența unei legi de conservare (invarianță) într-un sistem fizic cu simetrie (diferențiabilă). Rezultatul acesta introduce definitiv programul sau metoda lui Klein în fizică teoretică. Din acel moment, asemănător cu felul cum s-a procedat în geometrie, putem concepe un sistem fizic drept un ambient (fizic) și un grup de transformări sau simetrii pe care fizicienii îl numesc grup de etalonare (*gauge group*).

În geometrie, o dreaptă sau, mai general, o geodezică poate fi concepută ca o traiectorie invariantă la izometrii și care minimizează lungimea. Altfel spus, ca o soluție a unei „probleme variaționale“ (parcursul minim), invariantă la grupul izometriilor. Cu instrumente din analiza matematică, se vede că geodezicele sunt soluții ale unei ecuații diferențiale invariante.

Analog, o particulă elementară din fizică e soluția unei probleme variaționale care provine dintr-o problemă de fizică, invariantă la acțiunea unui anumit grup de etalonare. Și în aceste cazuri, folosind analiza matematică, particula poate fi gândită ca soluție a unei ecuații diferențiale invariante pe care fizicienii o numesc lagrangeană. De exemplu, electronul e soluția unei probleme variaționale într-un ambient spațiu-timp 4-dimensional, invariantă la transformările din grupul Lorentz.

„Rupând“ simetria, adică lărgind grupul și mărind libertatea de simetrie, sau lărgind spațiul ambient (ca în geometria

algebrică cu spațiul proiectiv), se introduc teorii fizice mai cuprinzătoare.

Un exemplu faimos avem în articolul lui Peter W. Higgs din 1964: „Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons" („Simetrii rupte și masele bosonilor de etalonare"). În acest scurt articol, Higgs lărgește grupul de etalonare și extinde spațiul ambient, rupând simetria sistemului fizic; ca urmare, găsește o particulă elementară (adică o soluție a unui lagrangean invariant) pe care o numește *boson cu masă*, faimosul *boson Higgs*.

Cincizeci de ani mai târziu, fizicienii de la CERN, într-un experiment formidabil coordonat de italianca Fabiola Gianotti, obțin dovezi experimentale pentru existența acestui boson*.

TOPOLOGIA, GEOMETRIE EXTREMĂ

Am ajuns deci să considerăm geometria ca pe o disciplină care studiază un spațiu ambient și obiectele acestuia din perspectiva proprietăților lor invariante față de un grup de transformări. E firesc să ne întrebăm care poate fi grupul de transformări cel mai cuprinzător posibil, dincolo de care nu avem ce să mai căutăm fără să riscăm să sacrificăm rigoarea și înțelegerea.

E greu să pui frâu minții omenești, ne temem să îngrădim libertatea și fantezia intelectuală; dar, dacă ne gândim bine, descoperim că tocmai limitele, obiective sau impuse, sunt cele care stimulează mintea și-o împing către creativitate și descoperire. Știința se deplasează de-a lungul granițelor cunoașterii, vrând să le studieze și, dacă e posibil, să le depășească, mutându-se dincolo de ele.

Se pare că, după ce au înțeles bine conceptul de transformare, geometrii din secolul XX au căzut de acord că transformările admisibile cele mai generale sunt, deocamdată, *transformările*

---

* Despre bosonul Higgs, vezi Jim Baggott, *Higgs. Inventarea și descoperirea „Particulei lui Dumnezeu"* (Ed. Humanitas, București, 2018). (*N. tr.*)

continue. Sunt transformări ale spațiului sau, mai general, ale unei varietăți, care îl deformează – lungindu-l, scurtându-l, îndoindu-l, curbându-l, dar fără să-l rupă sau să-l lipească. Transformările acestea formează un grup, pentru că inversa unei alungiri e o scurtare (retracție) care e doar o alungire cu un factor negativ.

Tăieri și lipiri nu sunt admise: pe de altă parte, a tăia, adică a găuri, o minge de fotbal înseamnă s-o faci inutilizabilă din punct de vedere geometric.

Topologia, din cuvintele grecești τοποσ (loc) și λογος (studiu), e geometria care studiază obiectele și proprietățile unui ambient, spațiu sau varietate, care sunt invariante față grupul transformărilor continue. În acest context, ambientul asupra căruia acționează grupul se numește *spațiu topologic*, cel mai general concept de spațiu care există azi în geometrie.

Numele a fost introdus pe la jumătatea secolului XIX, dar există anumite rezultate ale lui Euler care au fost recunoscute ca primele din topologie, chiar întemeietoare ale ei.

În 1735, Euler vizitează orașul Königsberg, centru politic și cultural important al Germaniei, unde, printre alții, locuia și Kant. Orașul e străbătut de un râu care formează insule legate între ele prin șapte poduri, ca în figura 4.17, care reprezintă harta orașului la 1652.

Administratorii municipali îi pun lui Euler următoarea problemă: să găsească un traseu care să parcurgă toate podurile o singură dată și numai una singură. Probleme de tipul acesta sunt tipice pentru comisiile municipale care se ocupă de trafic.



Figura 4.17

Euler simplifică formularea problemei transformând în mod continuu (fără tăieturi) harta într-un *graf*, cel reprezentat în

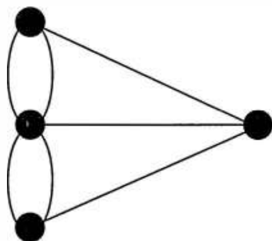

Figura 4.18

figura 4.18: diferitele componente ale uscatului delimitat de râu sunt concentrate în puncte numite *noduri*. Podurile care le uneau devin segmente, numite *laturi* sau *arce* ale grafului. Cu aceste simplificări, Euler pune deopotrivă bazele teoriei grafurilor și ale topologiei.

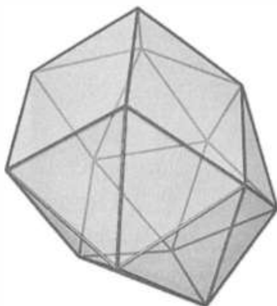
Apoi observă că, dacă se intră într-un nod folosind un pod, trebuie să se și iasă, cu excepția nodurilor inițial și final. Deci, pentru a putea parcurge toate podurile doar o singură dată, e necesar ca în fiecare nod să ajungă un număr par de poduri; acest număr se numește *gradul nodului*. Această observație simplă demonstrează următorul rezultat:

> Teoremă. Un graf poate fi parcurs în întregime trecând o singură dată de-a lungul fiecărui arc numai dacă (condiție necesară) are toate nodurile, cu excepția a două dintre ele, de grad par.

Așadar, problema podurilor din Königsberg nu are soluție, pentru că toate nodurile grafului au grad impar.

Condiția, s-a demonstrat mai târziu, e și suficientă: dacă un graf are cel mult două noduri de grad impar, el poate fi parcurs în întregime trecând o singură dată prin fiecare arc; trebuie plecat dintr-un nod impar și terminat în celălalt.

Tot lui Euler i se atribuie și următorul rezultat despre poliedrele convexe, ca acela din figura 4.19.


Figura 4.19

Formula lui Euler. Să considerăm un *poliedru convex*, adică un solid convex delimitat de un număr finit de fețe plane poligonale. Să notăm respectiv cu v, l și f numărul vârfurilor, laturilor și fețelor sale. Atunci are loc formula $v-l+f=2$.

Acesta e un rezultat de tip topologic, pentru că suma nu se schimbă dacă solidul e deformat în mod continuu.

O demonstrație simplă a formulei se obține presupunând că poliedrul poate fi construit plecând de la o față a lui și adăugând treptat celelalte fețe *lipind* la fiecare pas fața cea nouă *doar de-a lungul laturilor consecutive* celor precedente.

În această ipoteză, să vedem ce se întâmplă la fiecare pas cu numărul $\varphi = v - l + f - 1$. La primul pas avem doar o față și un număr egal de vârfuri și laturi, deci $\varphi = 0$. La pașii succesivi, lipind o față de-a lungul unor laturi consecutive, adăugăm o față, a laturi și $a - 1$ vârfuri, deci φ rămâne tot 0. La ultimul pas, lipind ultima față, ca să închidem solidul, adăugăm această nouă față și nici o latură în plus, nici un vârf în plus, deci φ devine 1, ceea ce voiam să demonstrăm.

Formula lui Euler are o mulțime de aplicații în matematică și în afara ei. În geometrie, o putem folosi ca să determinăm ușor *poliedrele regulate*, adică acelea cu toate fețele egale cu un același poligon regulat (în particular, egale între ele) și cu proprietatea că în fiecare vârf se întâlnesc un același număr de fețe. Corpurile acestea solide erau cunoscute încă din Antichitate: se interesa de ele școala greacă, iar în *Elemente* sunt discutate în Cartea a XIII-a. Cum Platon le-a folosit mult în dialogul *Timaios*, au fost numite *corpuri platonice*. Există numai cinci, iar acest rezultat e unul dintre cele mai bune din geometria în spațiu a școlii grecești. Cele cinci corpuri regulate sunt reprezentate în figura 4.20,

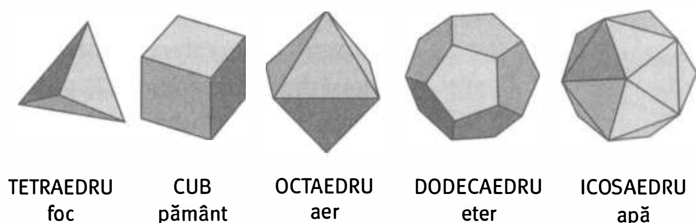


Figura 4.20

cu numele și corespondența lor cu un element fundamental, așa cum apar în *Timaios*.

Iată cum se poate demonstra existența a numai cinci poliedre regulate: să presupunem că fețele sunt triunghiuri regulate și că în fiecare vârf se întâlnesc x fețe. Dacă notăm cu f numărul fețelor, rezultă că numărul laturilor trebuie să fie $l = (3/2)f$ (pentru că fiecare latură stă pe două fețe), iar cel al vârfurilor $(3/x)f$. Formula lui Euler devine:

$$2 = v - l + f = \left(\frac{3}{x} - \frac{3}{2} + 1\right) f = \frac{6 - x}{2x} f$$

Deoarece în fiecare vârf trebuie să ajungă cel puțin trei fețe, soluțiile posibile sunt următoarele trei: $x = 3, f = 4$; $x = 4, f = 8$; $x = 5$, $f = 20$, corespunzând tetraedrului, octaedrului și icosaedrului. La fel găsim alte două cazuri, cu fețele pătrate, respectiv pentagoane; în fine, procedând asemănător, se arată că nu e posibil să avem fețe regulate cu mai mult de cinci laturi.

Un poliedru convex poate fi „umflat", adică transformat în manieră continuă până devine o sferă; alături de demonstrația pe care am indicat-o, observația aceasta ne spune că pavajele regulate ale sferei sunt exact cele cinci discutate mai înainte.

Am vorbit despre lipirea fețelor pentru a crea un poliedru, operație analoagă felului în care croitorul coase (eventual după ce a tăiat) bucăți de stofă. Tăierea și lipirea sunt operații bine definite și în topologie, dar, prin definiție, duc la schimbarea unor caracteristici topologice ale obiectului.

Să luăm două suprafețe; o *sumă conexă* a lor constă în tăierea câte unui disc din fiecare și lipirea celor două suprafețe de-a lungul circumferințelor celor două discuri. În figura 4.21 vedem suma conexă dintre un covrig cu două găuri și unul cu o singură gaură, acesta din urmă numit *tor*.

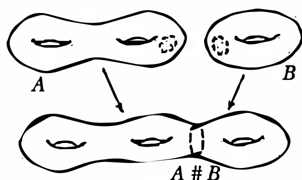


Figura 4.21

Dacă suprafețele sunt suficient de regulate (de exemplu nu

sunt disconexe, iar discurile pot fi tăiate din zone fără puncte singulare), suma conexă e bine definită, adică determină o suprafață unică până la transformări continue.

Să mai observăm că sfera poate fi privită drept 0, adică elementul neutru al acestei operații, suma conexă a oricărei suprafețe cu o sferă lăsând suprafața neschimbată (din punct de vedere topologic). Astfel, operația de sumă conexă ne permite să enunțăm și să demonstrăm următoarea teoremă de clasificare:

> Teoremă. Orice suprafață compactă (adică mărginită și fără bord) poate fi construită topologic, până la transformări continue, plecând de la o sferă și adăugând, folosind sume conexe, un anumit număr de toruri și plane proiective.

Suprafețele care conțin cel puțin un plan proiectiv rezultă că sunt *neorientabile*, un concept tehnic. Intuitiv, putem spune că o suprafață neorientabilă nu are o parte interioară și una exterioară; un exemplu e faimoasa sticlă a lui Klein de pe coperta acestei cărți.

Suprafețele compacte și orientate sunt echivalente topologic cu covrigi cu un anumit număr de găuri; numim acest număr *gen* și îl notăm cu *g*.

Rezultatul acesta apare pentru prima dată la Möbius, un student al lui Gauss. Figura 4.21 reprezintă deci o suprafață de gen 3, obținută ca sumă conexă dintre una de gen 2 și una de gen 1.

În 1895, Poincaré publică articolul *Analysis Situs*, considerat azi textul întemeietor al topologiei moderne. Printre altele, Poincaré introduce definiția *homeomorfismului*, termen extrem de folosit azi în matematică pentru a spune că două obiecte sunt topologic echivalente, adică se pot transforma continuu unul într-altul. Se pune deci problema de a determina condiții algebrice pentru studiul claselor de obiecte homeomorfe între ele. Așa apare conceptul de *grup fundamental* care se construiește după cum urmează. Se ia un punct pe o varietate și se consideră toate curbele închise care trec prin el, adică toate *drumurile închise* care pleacă și ajung în acel punct. Două drumuri se numesc

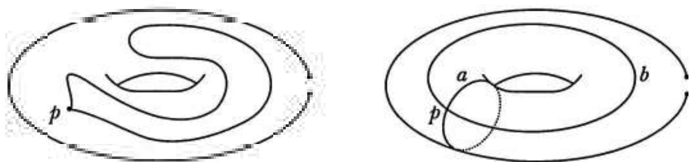


Figura 4.22

(omotop) echivalente dacă se pot deforma continuu unul în celălalt, rămânând tot timpul pe varietate.

În figura 4.22 vedem nişte drumuri pe un tor. În stânga avem un drum care poate fi deformat continuu la drumul nul; ne imaginăm drumul ca pe un elastic care poate fi strâns până la un punct fără a-l tăia. În dreapta, sunt două drumuri care nu sunt echivalente cu drumul nul şi nici nu sunt echivalente între ele: ca să le contractăm la drumul nul sau ca să le aplicăm unul pe celălalt, ar trebui să le tăiem şi apoi să le lipim.

Elementele grupului fundamental sunt toate drumurile închise, până la echivalenţă. Suma a două drumuri e acela care se obţine parcurgându-le pe cele două unul după altul, iar elementul nul e drumul care constă în a sta nemişcat în punctul ales.

Grupul fundamental al torului e generat de două elemente, cele două drumuri neechivalente din figura 4.22, dreapta, pentru că orice alt drum e echivalent cu suma conexă a unui anumit număr de drumuri de aceste două tipuri.

Poincaré observă că grupul fundamental e un invariant topologic, altfel spus că două varietăţi (de aceeaşi dimensiune) homeomorfe trebuie să aibă acelaşi grup fundamental. Îşi pune deci întrebarea când are loc reciproca.

În cazul suprafeţelor compacte, grupul fundamental determină tipul topologic; asta rezultă uşor din teorema de clasificare enunţată mai sus. În particular, până la homeomorfisme, sfera e singura suprafaţă închisă cu grup fundamental nul; de altfel, e destul de simplu de demonstrat, cu ajutorul figurii 4.23, că orice drum închis pe sferă poate fi deformat la drumul nul.

În general, în dimensiuni mai mari, grupul fundamental nu determină clasa de homeomorfism a varietății; acesta e motivul pentru care s-au introdus și alți invarianți algebrici, de exemplu grupurile de omotopie de ordin superior.

În 1904, Poincaré se întreabă dacă grupul fundamental e suficient măcar în cazul sferei de dimensiune 3; azi, întrebarea lui se formulează așa:

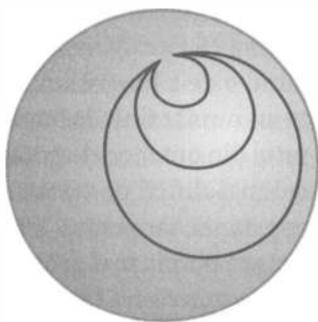


Figura 4.23

> *Conjectura lui Poincaré.* O varietate compactă (mărginită și fără bord) de dimensiune 3 cu grup fundamental nul (deci orice drum închis e echivalent cu cel nul) e homeomorfă cu sfera 3-dimensională.

Sfera n-dimensională e o varietate care se poate descrie ca locul punctelor din spațiul euclidian $(n+1)$-dimensional ale căror coordonate $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ satisfac ecuația polinomială $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x^2_{n+1} = 1$.

Poincaré era convins că-și poate demonstra conjectura; spunea că nu se apucă de ea pentru că i-ar fi luat prea mult timp și n-ar mai fi putut lucra la alte proiecte. Din momentul în care a propus-o, a devenit problema cea mai importantă din topologie și, poate, din întreaga geometrie; au fost mulți cercetători care au propus soluții dovedite ulterior greșite.

În a doua jumătate a secolului trecut s-a descoperit că e mai ușor de demonstrat conjectura analoagă pentru sfere de dimensiune mai mare decât 3, chiar dacă în niște ipoteze suplimentare în lipsa cărora există contraexemple. Cazul $n \geq 5$ a fost demonstrat de Stephen Smale; douăzeci de ani mai târziu, Michael Friedmann demonstra cazul $n=4$; amândoi au fost răsplătiți cu Medalia Fields, în anii 1966 și respectiv 1986.

În 1983, William Thurston, laureat Fields în 1982, lansează un program de clasificare a varietăților compacte, orientabile,

3-dimensionale asemănător celui pentru suprafețe. Concret, afirmă că fiecare varietate de acest tip poate fi descompusă, tăind-o de-a lungul unor sfere 2-dimensionale sau toruri, într-un număr finit de bucăți, fiecare dintre ele homeomorfă cu unul din opt modele posibile. Cea de-a opta clasă se dovedește cel mai dificil de tratat; e formată din varietăți cu curbură constantă, iar pentru a le înțelege trebuie demonstrată o conjectură un pic mai generală decât a lui Poincaré (*conjectura de geometrizare a lui Thurston*).

La aproape o sută de ani după formularea conjecturii lui Poincaré, matematicianul rus Grigori Perelman propune, în două articole din 2002, respectiv 2003, o soluție pozitivă a conjecturii. Mai mult, în aceste articole demonstrează și conjectura mai generală a lui Thurston. În rezumatul primului articol, Perelman scrie:

> [...] verificăm și unele afirmații legate de programul lui Richard Hamilton pentru demonstrarea conjecturii lui Thurston despre geometrizarea varietăților tridimensionale închise, schițăm o demonstrație eclectică a acestei conjecturi [*we give a sketch of an eclectic proof of this conjecture*] folosind rezultate anterioare despre colapsarea în cazul curburii locale mărginite inferior.

Demonstrația se face pe o varietate infinit dimensională ale cărei puncte sunt varietăți riemanniene cu curbură Ricci fixată. Un pas esențial al soluției fusese făcut anterior de Hamilton, care propusese o metodă pentru deformarea unei varietăți riemanniene cu curbură Ricci pozitivă în una cu curbură constantă; deformarea se face de-a lungul unei traiectorii numite *flux Ricci*, care apare ca soluție a unei ecuații diferențiale foarte asemănătoare cu ecuația căldurii (care descrie răspândirea căldurii într-un corp solid). Dar Hamilton și alți matematicieni se loviseră de o problemă foarte serioasă: aceste fluxuri Ricci trec prin puncte singulare ale varietății ambiente, iar tehnicile obișnuite în teoria ecuațiilor diferențiale nu funcționează în asemenea

puncte. Dificultatea a fost depăşită de Perelman cu metode de analiză matematică pe varietăţi cu singularităţi, metode puse la punct de şcoala rusă la sfârşitul secolului trecut.

Perelman nu şi-a publicat niciodată manuscrisele cu soluţia conjecturii lui Poincaré într-o revistă oficială de matematică: le-a postat doar pe internet, anume pe arhiva de preprinturi ştiinţifice ArXiv: https://arxiv.org/abs/math/0211159 şi https://arxiv. org/abs/math/0307245. Pot fi accesate gratuit de oricine.

În primul articol, Perelman precizează că cercetarea a fost finanţată din economiile proprii făcute din salariile primite ca *visiting professor* al mai multor instituţii ştiinţifice americane.

A durat mult – luni întregi – până când comunitatea matematică mondială s-a decis să ia în serios încercarea lui Perelman. Timp de câţiva ani, experţi cu multă experienţă au studiat rezultatele conţinute în cele două lucrări; printre ei, Gang Tian şi John Morgan care au refăcut întreaga demonstraţie, făcând-o mai accesibilă comunităţii matematice, atât printr-o serie de seminarii ţinute în toată lumea, cât şi prin publicarea unei cărţi. În 2004, la întoarcerea de la o conferinţă de două săptămâni la Princeton dedicată rezultatelor lui Perelman, Tian îi scrie: „Cred că am înţeles întreaga lucrare, *it's all right*".

Într-o notă marginală, Perelman observă că există

> o relaţie între fizica statistică şi geometria semiriemanniană, aşa cum se vede în termodinamica găurilor negre dezvoltată de Hawking şi de alţii. Din păcate, domeniul acesta e deocamdată dincolo de puterea mea de înţelegere.

Rezultatele lui Perelman sunt însă foarte folosite acum de fizicienii teoreticieni care se ocupă cu determinarea formei universului.

În 2006, lui Perelman i se acordă Medalia Fields „pentru contribuţiile sale în geometrie şi pentru viziunea revoluţionară asupra structurii analitice şi geometrice a fluxului Ricci". Matematicianul rus renunţă la medalie, explicând că

> e complet irelevant [pentru el], oricine putând înțelege că odată ce demonstrația e corectă, nici un alt fel de recunoaștere nu mai e necesar.

După care adaugă:

> până să devin celebru, puteam să aleg: să fac niște chestii urâte [se referă la demascarea unor comportamente necinstite în comunitatea științifică] sau să nu le fac și să fiu tratat ca un animal de companie [*pet*]. Devenind celebru, nu mai pot să mă prefac a fi un animăluț cuminte, iată de ce renunț.

Universitățile cele mai prestigioase din lume i-au oferit catedre și salarii excepționale; n-a acceptat nici o ofertă, ba, mai mult, a demisionat de la Institutul Steklov din Sankt Petersburg (unde, de altfel, era plătit cu un salariu lunar de câteva sute de euro). S-a îndepărtat de comunitatea științifică, declarând că nu se mai consideră un matematician profesionist.

Cred că, dintre oamenii de știință contemporani, Perelman e, de departe, figura cea mai fascinantă, atât pentru măreția descoperirilor, cât și pentru simplitatea paradoxală cu care-și duce viața în societate și în comunitatea științifică. Aparent, e un excentric, un absolut onest Don Quijote al matematicii; la o privire mai atentă însă, e greu să nu împărtășești multe dintre opiniile sale și să nu-i admiri curajul și hotărârea cu care și le susține.

În 2006, doi jurnaliști americani, Sylvia Nasar și David Gruber, au publicat în *New Yorker*, suplimentul duminical al *New York Times*, un lung articol despre povestea lui Perelman care merită cu prisosință citit: https://www.newyorker.com/magazine/ 2006/08/28/manifold-destiny.*

---

* Citatele de mai sus fac parte din acest articol. (*N. tr.*)

Clay Mathematics Institute din Cambridge, Massachussets (http://www.claymath.org/), e finanţat de Landon T. Clay, om de afaceri american activ în *venture capital* ştiinţific şi mecena care „crede în cunoaşterea matematică şi în poziţia ei centrală în progresul uman, în cultură şi în viaţa intelectuală".

În 24 mai 2000, Institutul anunţă şapte premii, fiecare în valoare de 1 milion de dolari,

> concepute pentru a certifica cele mai dificile probleme cu care se confruntă matematicienii la sfârşitul celui de-al doilea mileniu; pentru ca opinia publică să conştientizeze mai bine faptul că frontiera matematicii e încă deschisă şi ea cuprinde încă probleme importante nerezolvate; pentru a sublinia şi accentua importanţa lucrului la problemele cele mai profunde şi dificile; pentru recunoaşterea rezultatelor de importanţă istorică din matematică.

Premiile sunt legate de rezolvarea a şapte probleme alese şi descrise de un comitet ştiinţific format din cei mai prestigioşi matematicieni activi (http://www.claymath.org/millennium-problems). Una dintre probleme e conjectura lui Poincaré.

În 18 martie 2010, Institutul Clay îi acordă unul dintre premii lui Perelman pentru soluţia conjecturii lui Poincaré; motivaţia se încheie cu afirmaţia că „ne aflăm în faţa unuia dintre cei mai mari paşi înainte din matematică. Ideile şi metodele sale şi-au găsit deja numeroase aplicaţii în analiză şi geometrie; cu siguranţă, în viitor vor apărea multe altele".

În iulie 2010, Perelman renunţă la premiu, susţinând că contribuţia lui nu e mai importantă decât a lui Hamilton şi, în general, criticând organizaţiile comunităţii matematice şi deciziile lor. Trebuie semnalată, în acest context, ostilitatea puternică a lui Shing-Tung Yau, laureat Fields în 1982, faţă de articolele lui Perelman şi o anume tentativă a sa stângace de a atribui meritul soluţiei unor matematicieni chinezi în legătură

cu el – episod care atrage atenția asupra luptei în curs pentru controlul domeniului cercetării științifice în lume.

Deocamdată, conjectura lui Poincaré e singura rezolvată dintre cele șapte probleme ale mileniului. Cea mai cunoscută e, probabil, *ipoteza lui Riemann*, problemă de analiză matematică și de teoria numerelor introdusă de Hilbert la începutul secolului XX într-o listă de 23 de probleme care, după părerea lui, ar fi trebuit să-i preocupe pe matematicienii secolului ce abia începea. Unele dintre cele 23 au fost deja rezolvate, altele declarate prea generice, trei sunt încă deschise, printre care și ipoteza lui Riemann: cu siguranță, când a anunțat premiile, Institutul Clay s-a inspirat și din lista lui Hilbert.

Geometrii mai au încă șanse să câștige 1 milion de dolari, chiar dacă a fost rezolvată conjectura lui Poincaré. Printre problemele deschise se mai află una de geometrie, anume *conjectura lui Hodge* (http://www.claymath.org/millennium-problems/ hodge-conjecture).

William Hodge a fost un matematician englez care, după studii la Cambridge, a petrecut o lungă perioadă în universități de pe Coasta de Est a Statelor Unite, printre care Princeton și Johns Hopkins, din Baltimore, pentru a se perfecționa cu Solomon Lefschetz și cu Oskar Zariski. Aceștia din urmă au fost fondatorii școlilor americane de topologie, analiză complexă și geometrie algebrică; opera lor a avut un rol crucial în afirmarea rolului de fanion al Statelor Unite în știința și tehnologia celei de-a doua jumătăți a secolului XX.

Ideea inițială a lui Poincaré de a asocia varietăților topologice anumite structuri algebrice, cum e grupul fundamental, s-a impus ca metodă generală, dând naștere unei discipline pe care azi o numim *topologie algebrică*. Considerând nu doar curbe, ci subvarietăți topologice de orice dimensiune, luate până la echivalență topologică (mai precis, până la *echivalență omologică*), ajungem să asociem unei varietăți și alte grupuri, numite *grupuri de omologie* și dualele lor, zise *grupuri de coomologie*. Se studiază apoi condițiile în care aceste grupuri determină varietatea

cu care sunt asociate. Acesta e un mod concret de a studia varietăţi de o anumită dimensiune prin intermediul subvarietăţilor sale de dimensiune mai mică; e o abordare inductivă, se pleacă de la puncte, cum a făcut şi Euclid, se trece apoi la curbe, la suprafeţe şi, treptat, cu dificultăţi tehnice tot mai mari, la varietăţi de dimensiune oarecare.

Hodge îşi concentrează cercetările pe structura grupurilor de coomologie ale unei varietăţi algebrice definite peste corpul numerelor complexe, despre care am vorbit mai înainte. Observă că, în acest caz, proprietăţile algebrice ale numerelor complexe, înmulţirea lor de factură specială şi operaţia de conjugare, se ridică la proprietăţi similare pe grupurile de coomologie. În plus, multe dintre elementele acestor grupuri pot fi determinate de ecuaţii diferenţiale speciale peste corpul numerelor complexe: printre acestea, deosebit de relevante sunt aşa-numitele *clase ale lui Hodge*.

Într-o varietate algebrică, elementele cele mai naturale ale grupurilor de coomologie sunt cele definite de subvarietăţi la rândul lor algebrice, adică definite ca zerouri ale polinoamelor; aceste elemente se numesc *cicli algebrici*.

În 1950, Hodge a fost unul dintre principalii conferenţiari la Congresul Internaţional al Matematicienilor ţinut la Cambridge, Massachusetts, organizat la fiecare patru ani de Uniunea Matematică Internaţională, ocazie cu care se acordă şi Medaliile Fields. Expunerea lui a avut un impact puternic asupra studiilor ulterioare în geometria algebrică; în particular, a fost universal recunoscută importanţa claselor Hodge pentru clasificarea varietăţilor algebrice, compacte şi netede. Cu acel prilej, Hodge a vorbit şi despre o anumită convingere a lui pe care, a spus, nu e în stare să o demonstreze:

> *Conjectura lui Hodge.* Într-o varietate algebrică complexă, definită într-un spaţiu proiectiv, orice ciclu Hodge e omolog cu o combinaţie cu coeficienţi raţionali de cicli algebrici.

Hodge a propus, de fapt, o versiune mai tare a conjecturii, care însă s-a dovedit falsă, anume că orice ciclu Hodge ar fi algebric.

Ipoteza că varietatea e algebrică și parte a unui spațiu proiectiv e necesară: lucrul a fost demonstrat recent de matematiciana franceză Claire Voisin.

Conjectura aceasta se află între proiectele de cercetare ale multor matematicieni, unii căutând o demonstrație, alții un contraexemplu. În oricare din cazuri, „câștigătorului“ îi va reveni un premiu de 1 milion de dolari și, mai ales, faima și onoarea cuvenite cuiva care rezolvă una dintre cele mai dificile probleme ale geometriei moderne.

SERIA ȘTIINȚĂ
este coordonată de Vlad Zografi

Au mai apărut:

PIETRO GRECO
Povestea numărului π

SABINE HOSSENFELDER
Rătăciți printre formule: Cum îi derutează frumusețea pe fizicieni

FRANS DE WAAL
Mama. Ultima îmbrățișare: Ce ne spun emoțiile animalelor despre noi înșine

JIM AL-KHALILI
Extratereștrii: Ce ne spune știința despre viața în univers

ALEXANDRU TOMA PĂTRAȘCU
Povestiri despre epidemii și vaccinuri

RICHARD MULLER
Acum: Fizica timpului

JOHN HANDS
Cosmosapiens: Evoluția omului de la originile universului

Ilustrația de pe copertă:
© Ekostsov | Dreamstime.com

Orientarea în spațiu, perceperea unui obiect prin forma sa, minimizarea distanțelor de deplasare – toate acestea sunt înzestrări geometrice de care ne folosim în viața de zi cu zi. Platon nu-i lăsa să intre în Academia sa decât pe cei familiarizați cu geometria, o știință care aduce în discuție aspecte filozofice, dar în același timp dă răspunsuri la nenumărate probleme practice. De la linia dreaptă la spațiile curbe, teoremele din geometrie au făcut mereu ca ceea ce e dificil să devină simplu. Dar în ce mod explorează mintea umană forma lucrurilor? – iată întrebarea pe care și-o pune profesorul Marco Andreatta, invitându-ne într-o călătorie care ne conduce de la Euclid și geometria elementară la Bernhard Riemann și teoriile contemporane ce furnizează fizicii instrumentele pentru a înțelege universul și a încerca să formuleze o „teorie a tot ce există". Andreatta îmbină rigoarea și claritatea cu arta de a spune povestea fascinantă a geometriei.

ISBN 978-973-50-6881-3

